**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**----------***----------**

TRẦN QUỐC HỘI

# BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

*Thái Nguyên – Năm 2010*

*Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên* *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**----------***----------**

TRẦN QUỐC HỘI

# BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên nghành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**
**TS. NGUYỄN VĂN NGỌC**

*Thái Nguyên – Năm 2010*

*Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên* *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**----------***----------**

TRẦN QUỐC HỘI

# BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên nghành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.36

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

*Thái Nguyên – Năm 2010*

*Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên* *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Công trình được hoàn thành tại

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

Người hướng dẫn khoa học: **TS. NGUYỄN VĂN NGỌC**

**Phản biện 1.**

……

……..……..

**Phản biện 2.**

……

……..……..

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

*Ngày…….tháng…….năm 2010*

Có thể tìm hiểu luận văn tại: **Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên**

**Thư viện trường Đại học Khoa Học**

# Mục lục

**Mục lục** . . . . . 1
**Mở đầu** . . . . . 3

**Chương 1. Biến đổi Fourier rời rạc** **6**
1.1. Căn bậc $N$ của đơn vị và các tính chất . . . . . 7
1.1.1. Định nghĩa . . . . . 7
1.1.2. Các tính chất của $W_N$ . . . . . 7
1.2. Hàm rời rạc tuần hoàn trong không gian Unita $\mathbb{C}^N$ . . . 8
1.2.1. Hàm rời rạc tuần hoàn . . . . . 8
1.2.2. Không gian Unita $\mathbb{C}^N$ . . . . . 9
1.3. Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn . . . . . 11
1.3.1. Dẫn luận . . . . . 11
1.3.2. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc . . . . . 12
1.4. Công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược của dãy tuần hoàn 13
1.5. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn . . . . . 14
1.5.1. Tính tuyến tính. . . . . 14
1.5.2. Tích chập. . . . . 14
1.5.3. Đẳng thức Parseval . . . . . 16
1.5.4. Tính tuần hoàn . . . . . 16
1.5.5. Dịch chuyển và biến điệu . . . . . 17
1.6. Các ví dụ . . . . . 18
1.7. Biến đổi Fourier rời rạc của dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn . . . . . 21
1.8. Biến đổi cosine và sine rời rạc . . . . . 22
1.8.1. Định nghĩa biến đổi rời rạc tổng quát . . . . . 22
1.8.2. Các phép biến đổi DCT - 1 và DCT - 2 . . . . . 23

**Chương 2. Biến đổi Fourier nhanh** **25**
2.1. Thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian đối với $N = 2^k$ . . . . . 26
2.1.1. Mô tả thuật toán FFT . . . . . 26
2.1.2. Sơ đồ thuật toán FFT theo thời gian đối với $N = 2^3$ 28
2.2. Hiệu quả tính toán của thuật toán FFT . . . . . 28
2.3. Thuật toán Fourier nhanh rút gọn theo tần số . . . . . 31
2.3.1. Nội dung của thuật toán rút gọn theo tần số . . . 31
2.3.2. Sơ đồ thuật toán FFT theo tần số với $N = 2^3$ . . 33
2.4. Biến đổi Fourier nhanh đối với trường hợp $N = RC$ . . . 33
2.4.1. Trường hợp $N = 6 = 3.2$ . . . . . 34
2.4.2. Dạng nhân tử FFT tổng quát . . . . . 36

**Chương 3. Một số ứng dụng** **39**
3.1. Giải phương trình vi phân thường . . . . . 39
3.2. Bài toán biên Dirichlet cho phương trình Helmholz . . . 41
3.2.1. Đặt bài toán . . . . . 41
3.2.2. Rời rạc hóa bài toán . . . . . 41
3.2.3. Fourier rời rạc cà Fourier nhanh . . . . . 42
3.3. Tín hiệu tiếng hót . . . . . 43
3.3.1. Định nghĩa . . . . . 43
3.3.2. Các tính chất cơ bản . . . . . 44
3.4. Một số hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số . 47
**Kết luận** . . . . . 61
**Tài liệu tham khảo** . . . . . 62

*Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên* *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

# Mở đầu

Lợi ích của xử lý số các tín hiệu ngày càng được khẳng định rõ ràng. Nó cũng được ứng dụng ở nhiều dạng khác nhau với những hiệu quả đặc biệt là trong các ngành khoa học chứ không phải chỉ là một môn học. Với mức độ phát triển ngày càng cao về cơ bản, về phương pháp và khả năng ứng dụng nó đã lôi cuốn được nhiều kỹ sư, các nhà vật lý cũng như các nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Trong lĩnh vực xử lý tín hiệu, biến đổi Fourier rời rạc (DFT) chiếm vị trí hàng đầu nhờ sự tồn tại các thuật toán hiệu quả của biến đổi Fourier rời rạc. Biến đổi Fourier nhanh (FFT) là công cụ hữu hiệu để tính các biến đổi Fourier rời rạc và Fourier rời rạc ngược. Thuật toán $FFT$ được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, từ các phép toán số học của số phức đến lý thuyết tín hiệu, lý thuyết nhóm và lý thuyết số.v.v...

Từ khi Cooley và Tukey phát hiện ra thuật toán tính nhanh các biến đổi Fourier rời rạc vào năm 1965 (người ta quen gọi là biến đổi Fourier nhanh - FFT), thuật toán này ngày càng khẳng định vai trò của mình, đặc biệt là xử lý tín hiệu số. Để tính DFT chiều dài $N$ cần số phép nhân là $N^2$ và $N(N-1)$ phép toán cộng. Thời gian tính toán sẽ rất đáng kể nếu $N$ đủ lớn. Một thuật toán nhanh hơn nhiều đã được phát triển bởi Cooley và Tukey khoảng năm 1965 gọi là thuật toán FFT. Đòi hỏi bắt buộc thuật toán này là chiều dài $N$ phải là lũy thừa của 2, tức là $N$ có dạng $N = 2^s$. Thuật toán này dựa vào trên việc khai triển biến đổi Fourier rời rạc của dãy có chiều dài $N = 2^s$ thành các tầng lớp nhỏ hơn. Cách mà trong đó nguyên tắc này thực hiện đưa đến nhiều thuật toán khác nhau, tất cả đều có mục đích là cải thiện khả năng tăng tốc độ tính toán. Đó là thuật toán FFT phân tích theo thời gian, thuật toán FFT phân tích theo tần số.v.v... Đối với các thuật toán FFT chiều dài $N$ thì chỉ cần $\frac{N}{2} log_2 N$ phép toán nhân và $N log_2 N$ phép cộng. Ngoài ra, còn

trình bày thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp $N = RC$, trong đó R hoặc C không phải là lũy thừa của 2. Đối với thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp $N = RC$ thì chỉ cần $N(R + C)$ phép nhân.

Luận văn trình bày cơ sở lý thuyết của biến đổi Fourier rời rạc và của thuật toán Fourier nhanh. Ngoài ra, cũng giới thiệu một số ứng dụng của biến đổi trên vào các bài toán về phương trình vi phân thường, bài toán biên Dirichlet của phương trình Poisson trong hình chữ nhật, xử lý tín hiệu tiếng hót trong Rada. Ngoài ra, luận văn trình bày một số bài toán về hàm hệ và tín hiệu đầu ra của các hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số.

Hiện nay tài liệu bằng tiếng Anh về DFT và FFT rất phong phú. Tuy nhiên, tài liệu bằng tiếng Việt về lĩnh vực này còn rất hạn chế và chủ yếu được trình bày trong các sách kỹ thuật dành cho các kỹ sư.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 3 chương.

Chương 1 **Biến đổi Fourier rời rạc**.
Trong chương này trình bày lý thuyết của biến đổi Fourier rời rạc cho dãy số tuần hoàn.

Chương 2 **Biến đổi Fourier nhanh.**
Trong chương này trình bày hai thuật toán biến đổi Fourier nhanh, đó là thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian và thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo tần số. Ngoài ra, trình bày thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp $N = RC$, trong đó R hoặc C không phải là lũy thừa của 2.

Chương 3 **Một số ứng dụng**.
Trong chương này trình bày một số ứng dụng của biến đổi Fourier rời rạc vào các bài toán về phương trình vi phân thường, bài toán biên Dirichlet của phương trình Poisson trong hình chữ nhật. Xử lý tín hiệu tiếng hót trong Rada và một số bài toán về hàm hệ và tín hiệu đầu ra của các hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số.

*Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên* *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Nguyễn Văn Ngọc - Viện Toán Học Hà Nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy.

Tôi xin cảm ơn tới các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K2 Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luân văn này.

Tôi xin cảm ơn tới Sở GD - ĐT Tỉnh Lạng Sơn, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Vũ Lễ - Bắc Sơn, Trường THPT Việt Bắc - TP. Lạng Sơn đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tâp.

Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 9 năm 2010

**Tác giả**

**Trần Quốc Hội**

*Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên* *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

# Chương 1
# Biến đổi Fourier rời rạc

Trong chương này trình bày lý thuyết của biến đổi Fourier rời rạc cho dãy số tuần hoàn. Nội dung chủ yếu của chương này được hình thành từ các tài liệu [1], [2], [3] và [8].

**Mở đầu**

Biến đổi tích phân Fourier của hàm $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ thường được định nghĩa bởi công thức

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

còn biến đổi Fourier ngược được cho bởi công thức

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Một trong các phương pháp tính gần đúng các tích phân trên có thể tiến hành như sau. Trước hết ta giả thiết rằng với các số $a, b$ có trị tuyệt đối đủ lớn: $a < 0, b > 0$ tích phân

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

là xấp xỉ tốt của tích phân Fourier. Từ đó đi đến định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc.

Trong chương này trình bày một số tính chất của biến đổi Fourier rời rạc.

Từ nay về sau ta luôn luôn hiểu $N$ là số nguyên dương, $\overline{z}$ là số phức liên hợp của số phức $z$, còn $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên. Ký hiệu $\mathbb{R}^N$ và $\mathbb{C}^N$ tương ứng là các không gian vectơ thực và phức.

## 1.1. Căn bậc $N$ của đơn vị và các tính chất

### 1.1.1. Định nghĩa

**Định nghĩa 1.1.1.** Nghiệm của phương trình $z^N - 1 = 0$ được gọi là căn bậc $N$ của đơn vị.

Trong lý thuyết số phức ta biết rằng đơn vị có $N$ căn bậc $N$ khác nhau và chúng được xác định bởi công thức

$$\varepsilon_k = W_N^k, \quad (k = 0, 1, ..., N-1), \tag{1.1}$$

$$W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}, \tag{1.2}$$

trong đó $i$ là đơn vị ảo: $i^2 = -1$. Dễ thấy rằng $\varepsilon_1 = W_N$. Công thức (1.2), như chúng biết là công thức Euler. Sau này chúng ta sẽ gọi $W_N$ là hạch Euler.

### 1.1.2. Các tính chất của $W_N$

**Mệnh đề 1.1.1.** *Hạch Euler $W_N$ có các tính chất cơ bản sau đây*

$$1) \quad W_N^{kN} = 1, \tag{1.3}$$

$$2) \quad W_N\overline{W_N} = 1, \tag{1.4}$$

$$3) \quad W_N^k = \overline{W_N}^{-k} = W_N^{N+k} = \overline{W_N}^{N-k}, \tag{1.5}$$

$$4) \quad W_N^{k(N-n)} = \overline{W_N^{kn}}, \tag{1.6}$$

$$5) \quad W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}, \tag{1.7}$$

$$6) \quad 1 + W_N + W_N^2 + ...W_N^{N-1} = 0, \tag{1.8}$$

$$7) \quad \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{mn} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n = pN, \\ 0, & \text{nếu } n \neq pN. \end{cases} \tag{1.9}$$

*Chứng minh.* Các tính chất từ 1) đến 5) là hiển nhiên. Tính chất 6) là trường hợp đặc biệt của tính chất 7), vì vậy ta chỉ cần chứng minh tính chất 7). Thật vậy, ta có

$$W_N^N = e^{2\pi i} = 1.$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{mpN} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}(W_N^N)^{mp} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} 1 = 1.$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{mn} = \frac{1}{N}.\frac{W_N^{Nn}-1}{W_N^n-1} = 0, \quad (n \neq pN).$$

Vậy công thức (1.9) được chứng minh.

## 1.2. Hàm rời rạc tuần hoàn trong không gian Unita $\mathbb{C}^N$

### 1.2.1. Hàm rời rạc tuần hoàn

Cho $N$ là một số nguyên dương cố định. Khi đó mọi số nguyên $m \in \mathbb{Z}$ đều có thể biểu diễn ở dạng

$$m = n + kN, \quad n = 0, 1, ..., N-1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Định nghĩa 1.2.1.** Cho hàm rời rạc $f(m)$ với $m \in \mathbb{Z}$. Hàm $f(m)$ được gọi là hàm tuần hoàn chu kỳ $N$, nếu với mọi $m = n + kN$ thì

$$f(n + kN) = f(n), \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định của các hàm rời rạc biến số nguyên tuần hoàn chu kỳ $N$ được ký hiệu là $\mathbf{Z}_N$ là nhóm cyclic của các số nguyên theo modulo số nguyên dương $N$

$$\mathbf{Z}_N = \mathbf{Z}/(N) \quad (\mathbf{Z} \quad modulo \quad N); (N) = \{kN : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tập hợp của các hàm rời rạc biến số nguyên tuần hoàn chu kỳ $N$ được ký hiệu là $L(\mathbf{Z}_N)$.
Dễ thấy rằng hàm

$$\omega(m) := W_N^m = e^{m2\pi i/N}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

là hàm tuần chu kỳ $N$. Thật vậy, với $m = n + kN$ ta có

$$\omega(n + kN) = e^{(n+kN)2\pi i/N} = e^{n2\pi i/N} e^{k2\pi i} = e^{n2\pi i/N} = \omega(n).$$

### 1.2.2. Không gian Unita $\mathbb{C}^N$

**Định nghĩa 1.2.2.** Giả sử $f, g$ là những hàm tuần hoàn rời rạc trong không gian $\mathbb{C}^N$. Trong $\mathbb{C}^N$, ta định nghĩa tích vô hướng hay là tích ngoài

$$< f, g >= \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\overline{g(k)}. \tag{1.10}$$

Chuẩn của phần tử $f$ được xác định theo công thức

$$||f|| = \sqrt{< f, f >}. \tag{1.11}$$

Xét các hàm

$$\omega_j(m) = W_N^{-jm} = e^{-jm2\pi i/N}, \quad m, j = 0, 1, 2, ..., N-1$$

và các vectơ

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= \frac{1}{\sqrt{N}}(\omega_j(0), \omega_j(1), ..., \omega_j(N-1)) \\ &= \Big(\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-2\pi ij.1/N}, \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-2\pi ij.2/N}, ..., \frac{1}{\sqrt{N}}e^{-2\pi ij.(N-1)/N}\Big).\end{aligned}$$

**Bổ đề 1.2.1.** *Các hàm $\mathbf{u}_j,\ j = 0, 1, ..., N-1$ là cơ sở trực chuẩn của không gian Unita $\mathbb{C}^N$.*

*Chứng minh.* Trước hết ta chứng minh tính trực chuẩn của hệ $\{\mathbf{u}_j\}$. Ta có

$$||\mathbf{u}_j|| =< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j >^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{-2\pi jn/N}}{\sqrt{N}}\frac{e^{2\pi jn/N}}{\sqrt{N}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\Big)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k >= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{u}_j(n).\overline{\mathbf{u}_k(n)} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(k-j)n}. \tag{1.12}$$

Theo công thức (1.9), từ (1.12) suy ra

$$< \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k >= 0,\ \ j \neq k.$$

Ta chứng minh họ $\{\mathbf{u}_j, j = 0, 1, ..., N-1\}$ là độc lập tuyến tính trong $\mathbb{C}^N$. Thật vậy, xét đẳng thức

$$c_o\mathbf{u}_o + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{N-1}\mathbf{u}_{N-1} = 0, \quad c_j \in \mathbb{C}, j = 0, 1, ..., N-1.$$

Đã biết

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= \frac{1}{\sqrt{N}}\Big(\omega_j(0), \omega_j(1), ..., \omega_j(N-1)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}(W_N^0, W_N^{-j}, ..., W_N^{-j(N-1)}),\end{aligned}$$

nên ta có hệ

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_{N-1} = 0,\\ c_0 + c_1 W_N^{-1} + c_2 W_N^{-2} ... + c_{N-1} W_N^{-(N-1)} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ c_0 + c_1 W_N^{-(N-1)} + c_2 W_N^{-2(N-1)} ... + c_{N-1} W_N^{-(N-1)(N-1)} = 0.\end{cases}$$

Hệ trên có dạng $Ac = 0$, trong đó: $c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1})^T$ và

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1\\ 1 & \overline{W}_N & \overline{W}_N^2 & \dots \overline{W}_N^{N-1}\\ 1 & \overline{W}_N^2 & \overline{W}_N^4 & \dots \overline{W}_N^{2(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \overline{W}_N^{(N-1)} & \overline{W}_N^{2(N-1)} & \dots \overline{W}_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}.$$

Ma trận $A$ là ma trận đối xứng nên $c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1})^T = 0$, do đó họ $\{\mathbf{u}_j, j = 0, 1, ..., N-1\}$ là độc lập tuyến tính.

**Định lý 1.2.1.** *Mọi vectơ* $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$, *tuần hoàn chu kỳ* $N$ *phân tích được thành tổng*

$$\mathbf{f} = \sum_{j=0}^{N-1} < \mathbf{f}, \mathbf{u}_j > \mathbf{u}_j. \tag{1.13}$$

*Chứng minh.* Vì họ các vectơ $\{\mathbf{u}_j\}$ là cơ sở trực chuẩn trong không gian Unita $\mathbb{C}^N$, nên mọi vectơ $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$ phân tích được theo cơ sở, do đó ta có

$$\mathbf{f} = \sum_{j=0}^{N-1} C_j \mathbf{u}_j. \tag{1.14}$$

Lấy tích ngoài hai vế của (1.14), ta có (1.13).

## 1.3. Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn

### 1.3.1. Dẫn luận

Biến đổi tích phân Fourier của hàm $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ thường được định nghĩa bởi công thức

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R}, \tag{1.15}$$

còn biến đổi Fourier ngược được cho bởi công thức

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{1.16}$$

Các tích phân (1.15), (1.16) nói chung là không thể tính được ở dạng đóng. Một trong các phương pháp tính gần đúng các tích phân trên có thể tiến hành như sau. Ta chỉ xét tích phân (1.15). Trước hết ta giả thiết rằng với các số $a, b$ có trị tuyệt đối đủ lớn: $a < 0, b > 0$ tích phân

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{1.17}$$

là xấp xỉ tốt của tích phân (1.15). Để tính gần đúng tích phân (1.17) ta phân hoạch đoạn $[a, b]$ bởi các điểm

$$t_o = a < t_1 < t_2 < .... < t_{N-1} = b.$$

Đặt

$$\Delta t = \frac{b-a}{N}, \quad t_k = a + k\Delta t, \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Khi đó xấp xỉ $\Phi$ của $\hat{f}$ được cho bởi công thức

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-i\omega t_k}\Delta t = e^{-ia\omega}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-i\omega k(b-a)/N}\Delta t. \tag{1.18}$$

Đặt

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{b-a}, \quad n = 0, 1, ..., N-1$$

và trong (1.18) cho $\omega = \omega_n$, ta được

$$\Phi(\omega_n) = e^{-ia\omega_n}\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-i2\pi kn/N}. \tag{1.19}$$

Biểu thức ở vế phải của (1.19) dẫn đến biến đổi sau đây

$$F_N[f](n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i2\pi kn/N}. \tag{1.20}$$

Công thức (1.20) dẫn đến biến đổi Fourier rời rạc dưới đây.

### 1.3.2. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

**Dạng dãy của biến đổi Fourier rời rạc.**

**Định nghĩa 1.3.1.** Chúng ta định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của hàm tuần hoàn $f(n)$ chu kỳ $N$ như sau

$$F(n) = F_N[f(k)](n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1. \tag{1.21}$$

Chúng ta cũng sử dụng ký hiệu

$$f(k) \leftrightarrow_N F(n).$$

*Chú ý* 1.3.1. Ngoài công thức (1.21) biến đổi Fourier rời rạc còn được định nghĩa bởi công thức

$$F(n) = F_N[f(k)](n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1. \tag{1.22}$$

**Dạng ma trận của biến đổi Fourier rời rạc.**

Ký hiệu $\mathbf{f}$ và $\mathbf{F_N[f]}$ là các vectơ

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F_N[f]} = \begin{bmatrix} F_N[f](0) \\ F_N[f](1) \\ \vdots \\ F_N[f](N-1) \end{bmatrix}$$

và ma trận

$$\mathbf{W_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ 1 & \overline{W} & \overline{W}^2 & \dots \overline{W}^{N-1} \\ 1 & \overline{W}^2 & \overline{W}^4 & \dots \overline{W}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \overline{W}^{N-1} & \overline{W}^{2(N-1)} & \dots \overline{W}^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

trong đó $W = W_N = e^{2\pi i/N}$. Sử dụng các tính chất của $W_N$ ta có thể biến đổi ma trận $\mathbf{W_N}$ về dạng

$$\mathbf{W_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ 1 & \overline{W} & \overline{W}^2 & \dots \overline{W}^{N-1} \\ 1 & \overline{W}^2 & \overline{W}^4 & \dots \overline{W}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \overline{W}^{N-1} & \overline{W}^{N-2} & \dots \overline{W} \end{bmatrix}, \quad W = W_N. \tag{1.23}$$

Khi đó ta có dạng ma trận của biến đổi Fourier rời rạc

$$\mathbf{F_N}[\mathbf{f}] = \mathbf{W_N}\mathbf{f}. \tag{1.24}$$

## 1.4. Công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược của dãy tuần hoàn

Trong mục này sẽ trình bày một số định lý về công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược.

**Định lý 1.4.1.** *Giả sử $f(k)$ là hàm rời rạc tuần hoàn chu kỳ $N$. Với biến đổi Fourier rời rạc*

$$F(n) = F_N[f](n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-kn}, \ n = 0, 1, ..., N-1 \tag{1.25}$$

*ta có*

$$f(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) W_N^{mn}, \quad m = 0, 1, ..., N-1. \tag{1.26}$$

*Chứng minh.* Nhân hai vế của (1.25) với $W_N^{nm}/N$ rồi lấy tổng hai vế theo $n$ từ 0 đến $N-1$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) W_N^{nm} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-kn} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(m-k)} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \delta_{mk}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Theo công thức (1.9) tổng bên trong ở vế trái của (1.28) bằng ký hiệu Kronecker $\delta_{mk}$. Do đó ta có

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\delta_{mk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)W_N^{nm}.$$

Từ đây suy ra công thức (1.26). Công thức (1.26) được gọi là công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược của biến đổi Fourier rời rạc (1.25). Trong kỹ thuật công thức (1.25) thường được gọi là công thức phân tích, còn công thức (1.26) được gọi là công thức tổng hợp.

*Chú ý* 1.4.1. Nếu biến đổi Fourier rời rạc được định nghĩa bởi công thức (1.25) thì biến đổi Fourier rời rạc ngược được xác định theo công thức

$$f(m) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} F(n)W_N^{mn}, \quad m = 0, 1, ..., N-1. \tag{1.28}$$

## 1.5. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn

Các tính chất sau đây của biến đổi Fourier rời rạc được suy ra từ định nghĩa.

### 1.5.1. Tính tuyến tính.

Rõ ràng là $F_N$ và $F_N^{-1}$ là các ánh xạ tuyến tính.

### 1.5.2. Tích chập.

**Định nghĩa 1.5.1.** Tích chập của các hàm $f, g \in L(\mathbf{Z}_N)$ được ký hiệu là $f * g$ và được xác định theo công thức

$$f * g(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)g(m-k). \tag{1.29}$$

**Mệnh đề 1.5.1.** *Giả sử $f, g, h \in L(\mathbf{Z}_N)$. Khi đó*

*a)* $f * g = g * f$,

*b)* $f * \delta = f$, *trong đó $\delta$ là tín hiệu xung* ,

*c)* $f * (g * h) = (f * g) * h$,

*d)* $\lambda(f*g) = (\lambda f)*(\lambda g), \quad \forall \lambda = const,$

*e)* $f*(g+h) = f*g + f*h.$

*Chứng minh.* a). Theo định nghĩa tích chập ta có

$$f*g(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)g(k-j) = \sum_{m=k}^{k-N+1} f(k-m)g(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{-(N-1)} f(k-m)g(m) = \sum_{m=0}^{N-1} f(k-m)g(m) = (g*f)(k).$$

b) Ta có

$$f*\delta(k) = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\delta(k-j) = f(1)\delta(k-1) + f(2)\delta(k-2) + ...$$
$$+ f(k)\delta(k-k) + ... + f(N-1)\delta(k-N+1) = f(k)\delta(0) = f(k),$$

nghĩa là

$$f*\delta = f, \qquad \forall f \in L(\mathbf{Z}_N).$$

Các tính chất c)-e) được chứng minh tương tự.

**Mệnh đề 1.5.2.** *Với mọi* $f, g \in L(\mathbf{Z}_N)$ *có đẳng thức*

$$F_N[f*g](n) = F_N[f](n)F_N[g](n). \tag{1.30}$$

*Chứng minh.* 1 Theo định nghĩa ta có

$$F_N[f*g](n) = \sum_{k=0}^{N-1} f*g(k)W_N^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{j=0}^{N-1} f(j)g(k-j)\Big)W_N^{-nk}$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\Big(\sum_{k=0}^{N-1} g(k-j)W_N^{-kn}\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} f(j)W_N^{-jn}\Big(\sum_{k=0}^{N-1} g(k-j)W_N^{-(k-j)n}\Big)$$
$$= F_N[f](n)F_N[g](n).$$

### 1.5.3. Đẳng thức Parseval

**Mệnh đề 1.5.3.** *Giả sử $u, v \in L(\mathbf{Z}_N)$. Khi đó*

$$a) \quad \sum_{n=0}^{N-1} u(n)\overline{v(n)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} U(k)\overline{V(k)}.$$

$$b) \quad \sum_{n=0}^{N-1} |u(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |U(k)|^2.$$

*Chứng minh.* a) Thật vậy, ta có

$$\sum_{n=0}^{N-1} u(n)\overline{v(n)} = \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} U(j)W_N^{jn}\Big)\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{V(k)}W_N^{-kn}\Big)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{V(k)}\sum_{j=0}^{N-1} U(j)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-(k-j)n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{V(k)}\sum_{j=0}^{N-1} U(j)\delta_{kj}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} U(k)\overline{V(k)}.$$

b) Được suy ra từ a) bằng cách cho $u = v$.

### 1.5.4. Tính tuần hoàn

**Mệnh đề 1.5.4.** *Giả sử $a(n) \in L(\mathbf{Z}_N)$, $A(m) = F_N[a](m)$. Khi đó*

$$A(m+N) = A(m), \tag{1.31}$$

$$F_N^{-1}[A](n+N) = F_N^{-1}[A](n). \tag{1.32}$$

*Chứng minh.* Trước hết ta chứng minh công thức (1.31). Ta có

$$A(m+N) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)W_N^{-n(m+N)} = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)W_N^{-nm}.W_N^{-nN}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} a(n)W_N^{-nm} = A(m).$$

Công thức (1.32) được chứng minh hoàn toàn tương tự.

### 1.5.5. Dịch chuyển và biến điệu

**Mệnh đề 1.5.5.** *Giả sử $a(k)$ là tuần hoàn với chu kỳ $N$ và $A(n) = F_N[a](n)$. Khi đó*

$$a) \textit{Dịch chuyển thời gian} : a(k-j) \leftrightarrow_N A(n)W_N^{-nj}. \tag{1.33}$$

$$b) \textit{Dịch chuyển tần số} : a(k)W_N^{jk} \leftrightarrow_N A(n-j). \tag{1.34}$$

$$c) \textit{Biến điệu} : a(k)\cos 2\pi jk/N \leftrightarrow_N \frac{1}{2}[A(n-j) + A(n+j)]. \tag{1.35}$$

*Chứng minh.* a) Ta có

$$\sum_{k=0}^{N-1} a(k-j)W_N^{-kn} = \sum_{m=-j}^{N-1-j} a(m)W_N^{-(m+j)n} = W_N^{-nj} \sum_{m=-j}^{N-1-j} a(m)W_N^{-mn}.$$

Phân tích tổng $\displaystyle\sum_{m=-j}^{N-1-j}$ thành: $\displaystyle\sum_{m=-j}^{-1} + \sum_{m=0}^{N-1-j}$.

Vì $a(n)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $N$, nên

$$\sum_{m=-j}^{-1} a(m)W_N^{-nm} = \sum_{m=N-j}^{N-1} a(m)W_N^{-mn}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} a(k-j)W_N^{-kn} &= W_N^{-nj}\Big(\sum_{m=-j}^{-1} a(m)W_N^{-nm} + \sum_{m=0}^{N-1-j} a(m)W_N^{-nm}\Big)\\ &= W_N^{-nj}\Big(\sum_{m=N-j}^{N-1} a(m)W_N^{-nm} + \sum_{m=0}^{N-1-j} a(m)W_N^{-nm}\Big)\\ &= W_N^{-nj}\sum_{m=0}^{N-1} a(m)W_N^{-nm} = W_N^{-nj}A(n).\end{aligned}$$

Công thức (1.33) được chứng minh.

b) *DFT* của $a(k)W_N^{jk}$ là

$$\sum_{k=0}^{N-1} a(k)W_N^{jk}W_N^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)W_N^{-k(n-j)} = A(n-j).$$

c) Vì

$$a(k)\cos 2\pi jk/N = \frac{1}{2}\Big(a(k)W_N^{jk} + a(k)W_N^{-jk}\Big)$$

nên theo b) thì DFT của $a(k)\cos 2\pi jk/N$ sẽ là

$$\frac{1}{2}[A(n-1) + A(n+1)].$$

**Nhận xét 1.1.** *Với các số $f(n)$ và $F(m)$ tương ứng trong các tổng* (1.25) *và* (1.26) *biến thiên từ 0 đến $N-1$ có thể tương ứng được thay bởi $n_1$ và $n_1+N-1$, trong đó $n_1$ là một số nguyên bất kỳ. Trường hợp đặc biệt quan trọng là $N = 2M+1$ với $n_1 = -M$, ta có*

$$F(m) = \sum_{n=-M}^{M} f(n)W_N^{-mn}, \quad f(n) = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} F(m)W_N^{mn}. \quad (1.36)$$

## 1.6. Các ví dụ

**Ví dụ 1.6.1.** Tìm biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu (xung đơn vị)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

*Lời giải.* Rõ ràng là

$$F_N[\delta(n)](m) = 1, \quad m = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

Như vậy biến đổi Fourier rời rạc của một xung đơn vị là một đoàn xung đơn vị.

**Ví dụ 1.6.2.** Tìm biến đổi Fourier rời rạc của $\delta(n-n_0) \quad (0 < n_0 < N)$.

*Lời giải.* Ta có

$$F_N[\delta(n-n_0)](m) = W^{-mn_0} = e^{-2\pi imn_0/N}, \quad m = 0, 1, ..., N-1.$$

**Ví dụ 1.6.3.** Tìm biến đổi Fourier rời rạc của dãy hằng $x(n) = A$ $(0 \leqslant n \leqslant N-1)$.

*Lời giải.* Ta có

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} Ae^{-2\pi imn/N}, \quad m = 0, 1, 2, ...., N-1.$$

Với $m = 0$, ta có

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} A.1 = N.A.$$

Với $m \neq 0$, ta có

$$X(m) = A\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi imn/N} = A\frac{1-e^{-2\pi im}}{1-e^{-2\pi im/N}} = 0.$$

Vậy

$$F_N[A](m) = AN\delta(m).$$

**Ví dụ 1.6.4.** Cho $f(n)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $N$. Tìm hàm tuần hoàn $g(n)$ tuần hoàn chu kỳ $N$ thỏa mãn phương trình

$$g(n) - \frac{1}{2}W_N^m g(n-1) = f(n).$$

*Lời giải.* Tác động biến đổi Fourier rời rạc vào hai vế của phương trình đã cho, ở thời điểm $m$, ta được

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)W_N^{-mn} - \frac{1}{2}W_N^m \sum_{n=0}^{N-1} g(n-1)W_N^{-mn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-mn},$$

$$G(m) - \frac{1}{2}W_N^m \sum_{k=-1}^{N-2} g(k)W_N^{-m(k+1)} = F(m),$$

$$G(m) - \frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{N-2} g(k)W_N^{-mk} = F(m). \tag{1.37}$$

Vì $g(n)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ N nên ta có

$$g(-1) = g((N-1) + 0.N) = g(N-1).$$

Nên ta có thể viết lại công thức (1.37) ở dạng

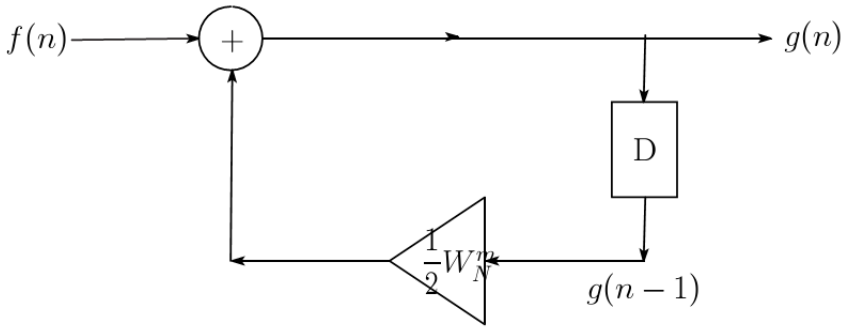
$$\begin{aligned} G(m) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)W_N^{-m(k+1)} &= F(m), \\ G(m) - \frac{1}{2}G(m) &= F(m), \\ G(m) &= 2F(m). \end{aligned}$$

Suy ra

$$g(n) = 2f(n),$$

là hàm tuần hoàn chu kỳ N.

Hình minh họa




**Ví dụ 1.6.5.** Tìm biến đổi rời rạc của dãy

$$x(n) = \{..., 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

*Lời giải.* Dãy trên có chu kỳ bằng 4, vì vậy $W_4 = e^{2\pi i/4} = i$. Do đó

$$X(m) = \sum_{n=0}^{3} x(n)W_4^{-mn} = x(0)i^0 + x(1)i^{-m} + x(2)i^{-2m} + x(3)i^{-3m},$$

với m=0, 1, 2, 3. Ta có

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 6.$$

$$X(1) = x(0)(i)^0 + x(1)(i)^{-1} + x(2)(i)^{-2} + x(3)(i)^{-3} = -2 + 2i.$$
$$X(2) = x(0)(i)^0 + x(1)(i)^{-2} + x(2)(i)^{-4} + x(3)(i)^{-6} = -2.$$
$$X(3) = x(0)(i)^0 + x(1)(i)^{-3} + x(2)(i)^{-6} + x(3)(i)^{-9} = -2 - 2i.$$

## 1.7. Biến đổi Fourier rời rạc của dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn

Trong thực tế, hầu hết các tín hiệu là không tuần hoàn mà chỉ xuất hiện trong một thời gian nào đó. Để có thể biểu diễn Fourier rời rạc các tín hiệu trên chúng ta tiến hành như sau. Giả sử tín hiệu rời rạc $x(n)$ có $N$ mẫu có điểm kéo dài từ $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Xét dãy sau đây

$$\tilde{x}(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+kN). \tag{1.38}$$

**Mệnh đề 1.7.1.** *Dãy $\tilde{x}(n)$ được xác định bởi công thức (1.38) là dãy tuần hoàn chu kỳ $N$.*

*Chứng minh.* Theo công thức (1.38) ta có

$$\tilde{x}(n+lN) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+lN+kN) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+(l+k)N).$$

Nếu đặt $j = l + k$, thì đẳng thức trên đây có thể viết lại ở dạng

$$\tilde{x}(n+lN) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(n+jN). \tag{1.39}$$

Từ (1.38) và (1.39) suy ra

$$\tilde{x}(n+lN) = \tilde{x}(n). \tag{1.40}$$

Dễ dàng thấy rằng $N$ là số dương nhỏ nhất để có đẳng thức (1.40), tức $N$ là chu kỳ của dãy $\tilde{x}(n)$. Từ đây ta có định nghĩa.

**Định nghĩa 1.7.1.** Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) đối với dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $N$ được xác định theo công thức

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-kn}, & 0 \leqslant k \leqslant N-1, \\ 0, & k \text{ còn lại.} \end{cases} \tag{1.41}$$

Công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược ( IDFT) được xác định theo công thức

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{kn}, & 0 \leqslant n \leqslant N-1, \\ 0, \quad n \quad \text{còn lại.} \end{cases} \tag{1.42}$$

## 1.8. Biến đổi cosine và sine rời rạc

### 1.8.1. Định nghĩa biến đổi rời rạc tổng quát

Giả sử $\{\Phi_k(n)\}_{k=0}^{N-1}, \quad n = 0, 1, ..., N-1$ là một cơ sở trực giao trong không gian Euclide $\mathbb{C}^N$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_k(n) \overline{\Phi_k(n)} = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

Biến đổi rời rạc tổng quát thuận và ngược tương ứng được xác định bởi các công thức

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \overline{\Phi_k(n)}, \tag{1.43}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(n). \tag{1.44}$$

Trong trường hợp DFT thì $\Phi_k(n) = W_N^{kn} = e^{kn\frac{2\pi i}{N}}$, còn nói chung dãy $X(k)$ nói chung là phức ngay cả khi dãy $x(n)$ là thực. Tuy nhiên, nếu các hàm $\Phi_k(n)$ là hàm cosine hay hàm sine thì các biến đổi (1.43), (1.44) sẽ biến các dãy thực tương ứng vào dãy thực. Chúng ta sẽ dùng DCT

để ký hiệu biến đổi rời rạc cosine. Hàm cosine là tuần hoàn và đối xứng chẵn, nên khai triển của $x(n)$ trong phương trình tổng quát (1.44) ở bên ngoài vùng $0 \leqslant n \leqslant N-1$ cũng sẽ tuần hoàn và đối xứng chẵn. Nói cách khác, ngoài tính tuần hoàn giống như DFT, DCT còn có thêm tính đối xứng chẵn nữa. Vì vậy DCT rất thích hợp cho việc tạo ra một dãy tuần hoàn và đối xứng từ một dãy có chiều dài hữu hạn và theo cách như vậy thì tín hiệu gốc cũng có thể được khôi phục lại một cách duy nhất từ các mẫu rời rạc.

Có nhiều cách định nghĩa về DCT. Nói chung có 4 cách định nghĩa tương ứng với 4 cách khia triển tuần hoàn đối xứng là DCT - 1, DCT - 2, DCT - 3 và DCT - 4. Ngoài ra, cũng có thể tạo ta các dãy thực tuần hoàn đối xứng lẻ từ $x(n)$ đối với hàm sine. Trong các phép biến đổi đó, chỉ có DCT - 1 và DCT - 2 là hay được sử dụng nhất, nên ở đây chúng ta chỉ tập trung xét hai phép biến đổi này.

### 1.8.2. Các phép biến đổi DCT - 1 và DCT - 2

Khai triển DCT - 1 được định nghĩa như sau

$$X^{c1}(k) = 2\sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n)x(n)\cos(\frac{\pi nk}{N-1}), \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{1.45}$$

$$x(n) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k)X^{c1}(k)\cos(\frac{\pi nk}{N-1}), \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{1.46}$$

với

$$\alpha(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \quad \text{và} \quad n = N-1, \\ 1, & 1 \leq n \leq N-2. \end{cases} \tag{1.47}$$

Khai triển DCT - 2 được định nghĩa bởi

$$X^{c2}(k) = 2\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}), \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{1.48}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta(k)X^{c2}(k)\cos(\frac{\pi(2n+1)}{2N}), \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{1.49}$$

trong đó

$$\beta(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, \\ 1, & 1 \leq k \leq N-1. \end{cases} \tag{1.50}$$

# Chương 2
# Biến đổi Fourier nhanh

Trong chương này trình bày hai thuật toán biến đổi Fourier nhanh đó là thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian và thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo tần số. Ngoài ra, trình bày thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp $N = RC$, trong đó R hoặc C không phải là lũy thừa của 2. Nội dung chủ yếu của chương này được hình thành từ các tài liệu từ [1-8].

**Mở đầu**

Biến đổi Fourier rời rạc đóng vai trò quan trọng trong phân tích, thiết kế và thực hiện các thuật toán và các hệ thống xử lý tín hiệu rời rạc. Chúng ta biết rằng DFT chính là các mẫu của biến đổi Fourier rời rạc tại các tần số cách đều nhau. Vì vậy, việc tính toán $F_N$ tương ứng với sự tính toán N mẫu của biến đổi Fourier rời rạc tại N tần số cách đều nhau một lượng bằng $\omega_k = 2\pi k/N$, tức là tại N điểm trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng phức.

Trong phần này chúng ta sẽ xét một số thuật toán để tính nhanh các giá trị của DFT được gọi là thuật toán biến đổi Fourier nhanh (FFT). Thuật toán FFT phải tính tất cả N giá trị của DFT sao cho có hiệu quả cao nhất. Nếu yêu cầu tính toán chỉ một phần của vùng tần số $0 \leqslant \omega < 2\pi$ thì các thuật toán khác có thể hiệu dụng và mềm dẻo hơn, ví dụ như các thuật toán Goertzel, hay như thuật toán biến đổi tiếng hót.

Tiếp theo chúng ta xét vấn đề tính nhanh các số $F(n)$ được xác định bởi công thức (1.21). Ta có

$$F(n) = f(0) + f(1)W_N^{-n} + f(2)W_N^{-2n} + ... + f(N-1)W_N^{-(N-1)n},$$

$n = 0, 1, ...., N-1$.

Như vậy với mỗi $n > 0$ chúng ta cần phải tiến hành $N-1$ phép nhân phức (tương ứng với 4(N-1) phép nhân thực) và $N-1$ phép cộng phức

( tương ứng với $2(N-1)$ phép cộng thực). Như vậy để tìm được tất cả các số $F(0), F(1), ..., F(N-1)$ cần phải thực hiện $(N-1)^2$ phép nhân phức và $N(N-1)$ phép cộng phức. Suy ra với $N$ càng lớn thì số phép tính cần thực hiện càng tăng lên rất nhiều. Cần phải khắc phục khó khăn trên đây. Vấn đề trên đây liên quan đến một thuật toán được gọi là biến đổi Fourier nhanh (FFT). Năm 1965 hai nhà toán học Cooley và Turkey đã tìm ra thuật toán tính toán nhanh biến đổi Fourier rời rạc. Từ đó một số thuật toán tính toán nhanh khác được xuất hiện với tên gọi chung là FFT. Điểm giống nhau của các thuật toán này là đều dựa trên nguyên tắc phân tích dãy N số thành các biến đổi Fourier rời rạc với các dãy số bế hơn.

## 2.1. Thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian đối với $N = 2^k$

### 2.1.1. Mô tả thuật toán FFT

Thuật giải FFT chỉ áp dụng cho trường hợp $N = 2^s,\ s \in \mathbb{N}$. Vì $N$ chẵn, nên tổng (1.21) có thể phân tích thành hai tổng

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W^{-kn} = \sum_{n \text{ chẵn}} f(n)W^{-kn} + \sum_{n \text{ lẻ}} f(n)W^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} f(2m)(W^2)^{-km} + W^{-k} \sum_{m=0}^{N/2-1} f(2m+1)(W^2)^{-km} \\ &:= F_e(k) + W^{-k}F_o(k). \end{aligned}$$

Vì $W^2 = e^{2.2\pi i/N} = e^{2\pi i/(N/2)}$, nên ta thấy $F_e(k)$ và $F_o(k)$ lần lượt là biến đổi Fourier của hai dãy

$$\{f(2m)|\ m = 0, 1, ..., N/2-1\} \text{ và } \{f(2m+1)|\ m = 0, 1, ...., N/2-1\}.$$

Có nghĩa là mỗi một $F_e(k)$ và $F_o(k)$ được phân tích thành tổng của hai phép biến đổi Fourier rời rạc của $N/2$ điểm. Tiếp tục quá trình trên cho đến khi cho đến khi ta được biến đổi Fourier rời rạc của 2 điểm. Ngoài ra, do tính tuần hoàn chu kỳ $N/2$ nên chỉ cần tính $F_e(k)$ và $F_o(k)$ với $N/2 \leqslant k \leqslant N-1$ hoặc với $0 \leqslant k \leqslant N/2-1$.

Lặp lại việc tách tổng như trên đối với $F_e(k), F_o(k)$, ta có

$$F_e(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} f(2m)(W^2)^{-km} = \sum_{p=0}^{N/4-1} f(4p)(W^4)^{-kp}$$
$$+ W^{-2k} \sum_{p=0}^{N/4-1} f(4p+2)(W^4)^{-kp} = F_{ee} + W^{-2k} F_{eo},$$
$$F_o(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} f(2m+1)(W^2)^{-km} = \sum_{p=0}^{N/4-1} f(4p+1)(W^4)^{-kp} +$$
$$W^{-2k} \sum_{p=0}^{N/4-1} f(4p+3)(W^4)^{-kp} = F_{oe} + W^{-2k} F_{oo}.$$
$$W^4 = e^{4.2\pi i/N} = e^{2\pi i/(N/4)} = W_{N/4}.$$

Thực hiện quá trình trên đối với $F_{ee}, F_{eo}, ...$, ta có

$$F_{ee}(k) = \sum_{p=0}^{N/4-1} f(4p)(W^4)^{-kp} = \sum_{q=0}^{N/8-1} f(8q)(W^8)^{-kq}$$
$$+ W^{-4k} \sum_{q=0}^{N/8-1} f(8q+4)(W^8)^{-kq} = F_{eee} + W^{-4k} F_{eeo},$$
$$F_{eo} = \sum_{q=0}^{N/4-1} f(4p+2)(W^4)^{-kp} = \sum_{q=0}^{N/8-1} f(8q+2)(W^8)^{-kq}$$

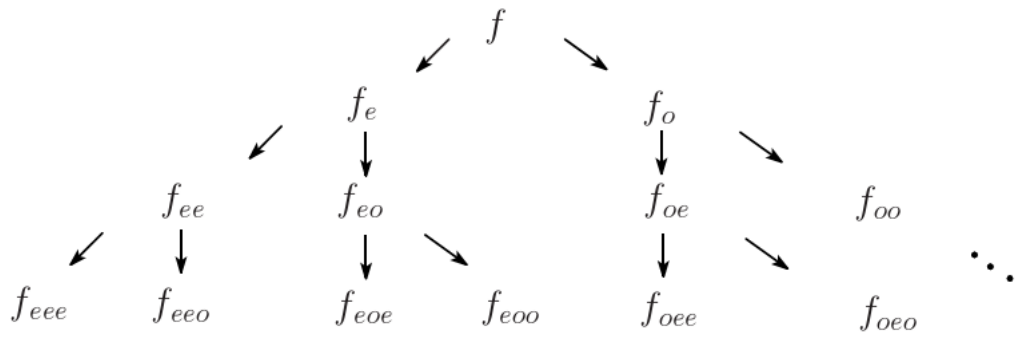
$$+ W^{-4k} \sum_{q=0}^{N/8-1} f(8q+6)(W^8)^{-kq} = F_{eoe} + W^{-4k} F_{eoo}.$$

Dưới đây chúng ta sẽ chứng minh rằng, nếu $N = 2^s$ và $f(n) \in \mathbb{C}^N$, thì để tính $F(m) = F_N[f](m)$ bằng thuật toán FFT cần $\frac{N}{2}\log_2 N$ phép nhân phức thay cho $(N-1)^2$ phép nhân phức và $N\log_2 N$ phép cộng phức thay vì $N(N-1)$. Xét ví dụ sau đây để thấy số phép toán giảm đi đáng kể. Với $N = 2^6 = 64$, thì

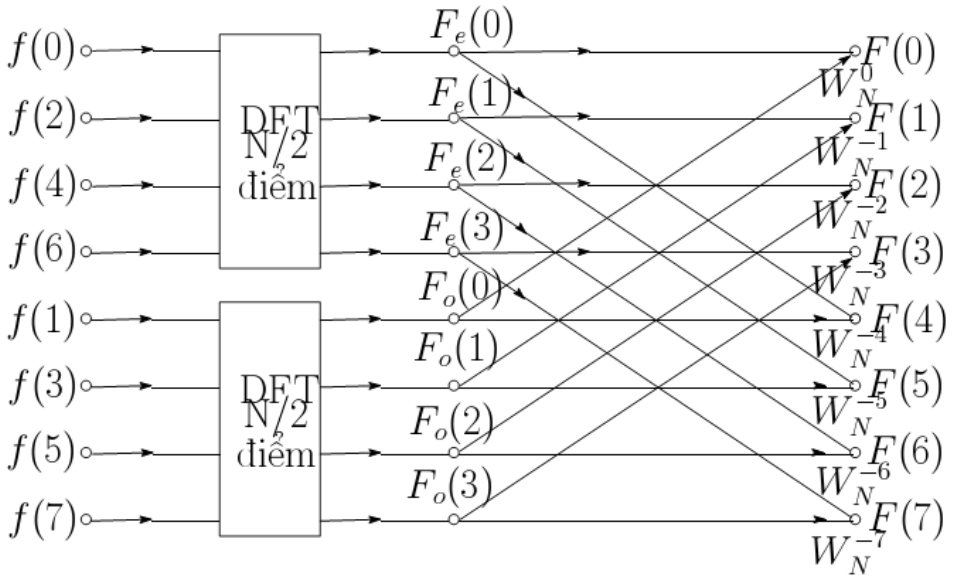
$$\frac{N}{2}\log_2 N = 192, \quad (N-1)^2 = 63^2 = 3969,$$

$$N \log_2 N = 384, \quad N(N-1) = 4032.$$

Như vậy, số phép nhân phức giảm đi khoảng 20 lần, còn số phép cộng phức giảm đi khoảng 10 lần.




### 2.1.2. Sơ đồ thuật toán FFT theo thời gian đối với $N = 2^3$




Hình 2.1 . Sơ đồ dòng tín hiệu phân tích theo thời gian của DFT $N$-điểm thành hai DFT $(N/2)$-điểm với N=8

## 2.2. Hiệu quả tính toán của thuật toán FFT

**Định lý 2.2.1.** *Giả sử $N = 2^k$ và $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$. Khi đó để tính $F_N\mathbf{f}$ số các phép nhân là*

$$2N \log_2 N = 2^{k+1}k.$$

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ chứng minh định lý theo quy nạp theo $k$. Với $k = 1, \mathbf{f} \in \mathbb{C}^2$ ta có

$$F_N\mathbf{f} = \mathbf{W}_2\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) - f(1) \end{pmatrix},$$

gồm có bốn phép nhân, hay $2.2^1.log_2 2$. Giả sư rằng kết quả đúng cho $N = 2^{k-1}$, nghĩa là $2.2^{k-1}.log_2 2^{k-1}$ phép nhân và xét $N = 2^k$. Ta có

$$F_N[f](n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-kn}, n = 0, 1, .., N-1. \tag{2.1}$$

Chia $k$ cho 2 và chia $n$ cho $N/2$ và biểu diễn chúng ở dạng

$$k = 2k_o + k_1, \quad n = (N/2)n_o + n_1.$$

Vì $k$ và $n$ thay đổi giữa 0 và $N-1$, nên

$$\begin{aligned} k_0 &= 0, 1, ..., N/2 - 1; \quad k_1 = 0, 1, \\ n_o &= 0, 1; \quad n_1 = 0, 1, .., N/2 - 1. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} W_N^{-kn} &= W_N^{-(2k_o+k_1)((N/2)n_o+n_1)} \\ &= W_N^{-Nk_on_o} W_N^{-(N/2)k_1n_o} W_N^{-2k_on_1} W_N^{-k_1n_1}. \end{aligned}$$

Thay biểu thức trên vào (2.1) ta có

$$F_N[f](n) = W_N^{-Nk_on_o} \sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o + k_1) W_N^{-(N/2)k_1n_o} W_N^{-2k_on_1} W_N^{-k_1n_1}.$$

Thay $k_1 = 0, 1$ ta có

$$F_N[f](n) = W_N^{-Nk_on_o} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o) W_N^{-2k_on_1}$$

$$+W_N^{-Nk_on_o} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o + 1) W_N^{-(N/2)n_o} W_N^{-2k_on_1} W_N^{-n_1}. \tag{2.2}$$

Vì $W_N^{-2} = W_{N/2}^{-1}$, nên ta có thể thay $W_N^{-2k_o n_1}$ bởi $W_{N/2}^{-k_o n_1}$ và ta có

$$F_N[f](n) = W_N^{-Nk_o n_o} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o) W_{N/2}^{-k_o n_1} +$$

$$+ W_N^{-(N/2)n_o} W_N^{-n_1} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o+1) W_{N/2}^{-k_o n_1}. \tag{2.3}$$

Thay $(N/2)n_o + n_1$ bởi $n$, khi đó $W_N^{-(N/2)n_o} W_N^{-n_1} = W_N^{-n}$. Do đó tổng thứ hai trong (2.3) được viết lại ở dạng gọn hơn

$$F_N[f](n) = W_N^{-Nk_o n_o} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o) W_{N/2}^{-k_o n_1} + + W_N^{-n} \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o+1) W_{N/2}^{-k_o n_1}, \tag{2.4}$$

$$n_o = 0, 1; \quad n_1 = 0, 1, 2, ..., N/2 - 1.$$

Viết các số hạng

$$\sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o) W_{N/2}^{-k_o n_1}, \quad \sum_{k_o=0}^{N/2-1} f(2k_o+1) W_{N/2}^{-k_o n_1}$$

ở dạng cột ta được :

$$F_{N/2}[f_e] = \mathbf{M_{N/2}} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ ... \\ f(N-2) \end{pmatrix} \text{ và } \quad F_{N/2}[f_o] = \mathbf{M_{N/2}} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(3) \\ ... \\ f(N-1) \end{pmatrix}.$$

Như vậy, (2.4) được viết lại ở dạng

$$F_N[f](n) = F_N[f](\frac{N}{2} n_o + n_1) = W_N^{-Nk_o n_o} F_{N/2}[f_e](n_1) + W_N^{-n} F_{N/2}[f_o](n_1). \tag{2.5}$$

Bây giờ ta tính xem cần bao nhiêu phép nhân thực đối với

$$F_{N/2}[f_e](n_1) = \mathbf{W_{N/2}} f_e(n_1) = \mathbf{W_{2^{k-1}}} f_e(n_1).$$

Với mỗi $n_1$, theo giả thiết quy nạp chúng ta cần $2(N/2)log_2 N/2$ phép nhân. Chúng ta cũng cần từng ấy phép nhân đối với $F_{N/2}[f_o](n_1)$. Như

vậy đối với hai số hạng này cần tất cả là $2Nlog_2N/2$ phép nhân thực. Với mỗi $n$ cố định ta cần hai phép nhân ( bởi $W_N^{-Nk_on_o}$ và $W_N^{-n}$) đối với $F_N[f](n)$. Vì $n = 0, 1, ..., N-1$, nên ta cần thêm $2N$ phép nhân, do đó số phép nhân tất cả sẽ là

$$2N + 2Nlog_2(N/2) = 2N(1 + log_2N - 1) = 2Nlog_2N.$$

**Nhận xét 2.1.** *Trong Định lý 2.2.1 số phép nhân phức là* $2N\log_2N$, *trong đó kể cả phép nhân với 1. Nếu ta không kể đến phép nhân với 1 thì số tất cả các phép nhân chỉ là* $(N/2)\log_2N$, *chỉ bằng một phần tư số* $2N\log_2N$.

Điều chủ yếu trong thuật toán FFT là phương trình (2.5), biểu diễn $F_N[f]$ qua $F_{N/2}[f_e]$ và $F_{N/2}[f_o]$. Trong (2.5) lần lượt cho $n_o = 0$ và $n_o = 1$, ta được

$$F_N[f](n) = F_{N/2}[f_e](n) + W_N^{-n}F_{N/2}[f_o](n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N/2 - 1 \quad (2.6)$$

và

$$F_N[f](N/2 + n) = W_N^{-Nk_o}F_{N/2}[f_e](n) + W_N^{-(N/2+n)}F_{N/2}[f_o](n). \quad (2.7)$$

Vì $W_N^{-Nk_o} = 1$ và $W_N^{-(N/2)} = -1$ các phương trình trên trở thành

$$F_N[f](n) = F_{N/2}[f_e](n) + W_N^{-n}F_{N/2}[f_o](n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N/2 - 1, \quad (2.8)$$

$$F_N[f](N/2 + n) = F_{N/2}[f_e](n) - W_N^{-n}F_{N/2}[f_o](n), \ 0 \leqslant n \leqslant N/2 - 1. \quad (2.9)$$

## 2.3. Thuật toán Fourier nhanh rút gọn theo tần số

### 2.3.1. Nội dung của thuật toán rút gọn theo tần số

Thuật toán FFT phân tích theo thời gian dựa trên việc phân tích dãy tín hiệu lối vào $x(n)$ thành các dãy con đều nhau có chiều dài nhỏ hơn và tính DFT trên các dãy con đó. Nếu ta phân tích tín hiệu lối ra $X(k)$

thành các dãy con nhỏ hơn và cũng cùng cách làm như trước thì sẽ được thuật toán gọi là thuật toán FFT rút gọn theo tần số.

Để thiết lập thuật toán này ta giả thiết $N = 2^s$ và phân tích dãy

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}, \quad k = 0, 1, ..., N-1 \tag{2.10}$$

thành hai dãy con, một dãy với chỉ số chẵn $X(2r)$, còn dãy kia với chỉ số lẻ $X(2r+1)$.

**1) Mẫu tần số với chỉ số chẵn:**

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-2rn}, \quad r = 0, 1, ..., (N/2) - 1. \tag{2.11}$$

Dãy này có thể biểu diễn ở dạng

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{-2rn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{-2rn}. \tag{2.12}$$

Tổng thứ hai trong (2.12) thay $n$ bởi $n + N/2$, ta được

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n) W_N^{-2rn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n + N/2) W_N^{-2r(n+N/2)}. \tag{2.13}$$

Sử dụng tính tuần hoàn

$$W_N^{-2r(n+N/2)} = W_N^{-2rn} W_N^{-rN} = W_N^{-2rn}$$

và vì

$$W_N^{-2} = W_{N/2}^{-1}$$

nên đẳng thức (2.13) có thể viết lại như sau

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \{x(n) + x(n + N/2)\} W_N^{-2rn}, \quad r = 0, 1, .., (N/2) - 1. \tag{2.14}$$

**2) Mẫu tần số với chỉ số lẻ:**

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-(2r+1)n}, \quad r = 0, 1, 2, ..., (N/2) - 1. \tag{2.15}$$

Tổng trên đây có thể tách thành hai như sau

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(n)W_N^{-(2r+1)n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)W_N^{-(2r+1)n}. \qquad (2.16)$$

Tương tự như trên kia, ta có thể sắp xếp lại tổng thứ hai trong (2.16) với việc sử dụng các công thức

$$W_N^{-(N/2)2r} = 1, \quad W_N^{-N/2} = -1, \quad W_N^{-2} = W_{N/2}^{-1}$$

và nhận được

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \{x(n) - x(n+\frac{N}{2})\} W_N^{-n} W_N^{-2rn},\ r = 0, 1, ..., (N/2)-1. \qquad (2.17)$$

Các phương trình (2.14) và (2.17) là các phương trình cơ bản để tính DFT (2.10) với các chỉ số chẵn và lẻ tương ứng. Nếu đặt $g(n) = x(n)+x(n+N/2)$ và $h(n) = x(n)-x(n+N/2)$ thì DFT có thể tính được bằng cách đầu tiên tạo ra các dãy $g(n)$ và $h(n)$, sau đó tính $W_N^{-n}h(n)$, và cuối cùng tính DFT(N/2)- điểm của hai dãy này để thu được dãy mẫu lối ra của các chỉ số chẵn và dãy mẫu lối ra của các chỉ số lẻ.

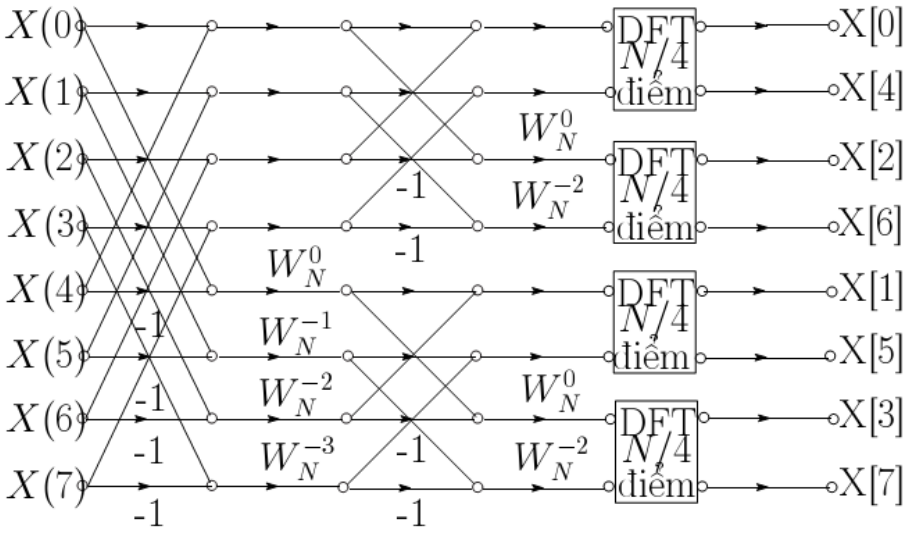
Cũng hoàn toàn tương tự giống như trong thuật toán rút gọn theo thời gian, vì N là luỹ thừa của 2, nên $N/2$ là chẵn, DFT(N/2)-điểm lại có thể tính được bằng cách tính DFT của các mẫu lối ra theo các chỉ số chẵn và các chỉ số lẻ. Có nghĩa là lại tiếp tục chia dãy mẫu lối ra thành N/4 và tính DFT(N/4)-điểm v.v.. Thí dụ, xét N=8, thì DFT(N/4)-điểm chính là DFT 2-điểm rất đơn giản.

Như vậy, nếu $N = 2^s$, thì thuật toán FFT rút gọn theo tần số chỉ đòi hỏi $(N/2)log_2N$ phép nhân phức và $Nlog_2N$ phép cộng phức. Có nghĩa là các yêu cầu về tính toán trong thuật toán rút gọn theo tần số và trong thuật toán rút gọn theo thời gian là như nhau.

### 2.3.2. Sơ đồ thuật toán FFT theo tần số với $N = 2^3$

## 2.4. Biến đổi Fourier nhanh đối với trường hợp $N = RC$

Trong phần này trình bày thuật toán FFT cho trường hợp $N = RC$, trong đó $R$ hoặc $C$ không phải là lũy thừa của 2. Chúng ta sẽ tính




Hình 2.2. sơ đồ dòng tín hiệu khai triển theo tần số của DFT 8 - điểm thành DFT 2 - điểm

$$\mathbf{F_N f} = \mathbf{W_N f}.$$

### 2.4.1. Trường hợp $N = 6 = 3.2$

Chúng ta sẽ nhóm các số hạng trong $\mathbf{W_6 f}$ bằng hai cách.

*Cách 1.)* *Với* $W = W_6 = e^{2\pi i/6}$ *và* $f(k) = a_k$ $(k = 0, 1, ..., 5)$ *ta có*

$$\mathbf{W_6 f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} & W^{-4} & W^{-5} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & 1 & W^{-2} & W^{-4} \\ 1 & W^{-3} & 1 & W^{-3} & 1 & W^{-3} \\ 1 & W^{-4} & W^{-2} & 1 & W^{-4} & W^{-2} \\ 1 & W^{-5} & W^{-4} & W^{-3} & W^{-2} & W^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}.$$

*Như vậy*

$$\mathbf{W_6 f} = \begin{pmatrix} a_o + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ a_o + a_1 W^{-1} + a_2 W^{-2} + a_3 W^{-3} + a_4 W^{-4} + a_5 W^{-5} \\ a_o + a_1 W^{-2} + a_2 W^{-4} + a_3 + a_4 W^{-2} + a_5 W^{-4} \\ a_o + a_1 W^{-3} + a_2 + a_3 W^{-3} + a_4 + a_5 W^{-3} \\ a_o + a_1 W^{-4} + a_2 W^{-2} + a_3 + a_4 W^{-4} + a_5 W^{-2} \\ a_o + a_1 W^{-5} + a_2 W^{-4} + a_3 W^{-3} + a_4 W^{-2} + a_5 W^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

*Vì* $6 = 2.3$ *nên ta nhóm các số hạng trong* $\mathbf{W_6 f}$ *thành hai nhóm, mỗi nhóm ba số hạng như sau:*

$$\mathbf{W_6 f} = \begin{pmatrix} (a_o + a_2 + a_4) + (a_1 + a_3 + a_5) \\ (a_o + a_2 W^{-2} + a_4 W^{-4}) + (a_1 W^{-1} + a_3 W^{-3} + a_5 W^{-5}) \\ (a_o + a_2 W^{-4} + a_4 W^{-2}) + (a_1 W^{-2} + a_3 + a_5 W^{-4}) \\ (a_o + a_2 + a_4) + (a_1 W^{-3} + a_3 W^{-3} + a_5 W^{-3}) \\ (a_o + a_2 W^{-2} + a_4 W^{-4}) + (a_1 W^{-4} + a_3 + a_5 W^{-2}) \\ (a_o + a_2 W^{-4} + a_4 W^{-2}) + (a_1 W^{-5} + a_3 W^{-3} + a_5 W^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

*Vì* $W^{-6k} = e^{-2\pi i 6k/6} = 1$ *với mọi* $k$ *nguyên, nên chúng ta có thể phân tích các số hạng như sau*

$$\mathbf{W_6 f} = \begin{pmatrix} 0 & (a_o + a_2 + a_4) + (a_1 + a_3 + a_5) \\ 1 & (a_o + a_2 W^{-2} + a_4 W^{-4}) + W^{-1}(a_1 + a_3 W^{-2} + a_5 W^{-4}) \\ 2 & (a_o + a_2 W^{-4} + a_4 W^{-2}) + W^{-2}(a_1 + a_3 W^{-4} + a_5 W^{-2}) \\ 3 & (a_o + a_2 + a_4) + W^{-3}(a_1 + a_3 + a_5) \\ 4 & (a_o + a_2 W^{-2} + a_4 W^{-4}) + W^{-4}(a_1 + a_3 W^{-2} + a_5 W^{-4}) \\ 5 & (a_o + a_2 W^{-4} + a_4 W^{-2}) + W^{-5}(a_1 + a_3 W^{-4} + a_5 W^{-2}) \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

*Nhận xét rằng trong* (2.20) *các biểu thức trong ngoặc ở vị trí tương ứng của các hàng 0 và hàng 3 giống nhau, hàng 1 và hàng 4 giống nhau, hàng 2 và hàng 5 giống nhau. Do đó khối lượng tính toán được giảm đi khá nhiều.*

*Cách 2.* Bây giờ trong (2.18) chúng ta nhóm các số hạng như sau

$$\mathbf{W_6 f} = \begin{pmatrix} (a_o + a_3) + (a_1 + a_4) + (a_2 + a_5) \\ (a_o + a_3 W^{-3}) + (a_1 W^{-1} + a_4 W^{-4}) + (a_2 W^{-2} + a_5 W^{-5}) \\ (a_o + a_3) + (a_1 W^{-2} + a_4 W^{-2}) + (a_2 W^{-4} + a_5 W^{-4}) \\ (a_o + a_3 W^{-3}) + (a_1 W^{-3} + a_4) + (a_2 + a_5 W^{-3}) \\ (a_o + a_3) + (a_1 W^{-4} + a_4 W^{-4}) + (a_2 W^{-2} + a_5 W^{-2}) \\ (a_o + a_3 W^{-3}) + (a_1 W^{-5} + a_4 W^{-2}) + (a_2 W^{-4} + a_5 W^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Vì $W^{-6k} = e^{-2\pi i 6k/6} = 1$ với mọi $k$ nguyên, nên chúng ta có thể phân tích các số hạng như sau

$$\mathbf{W_6 f} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (a_o + a_3) + (a_1 + a_4) + (a_2 + a_5) \\ 1 & (a_o + a_3 W^{-3}) + W^{-1}(a_1 + a_4 W^{-3}) + W^{-2}(a_2 + a_5 W^{-3}) \\ \mathbf{2} & (a_o + a_3) + W^{-2}(a_1 + a_4) + W^{-4}(a_2 + a_5) \\ 3 & (a_o + a_3 W^{-3}) + W^{-3}(a_1 + a_4 W^{-3}) + (a_2 + a_5 W^{-3}) \\ \mathbf{4} & (a_o + a_3) + W^{-4}(a_1 + a_4) + W^{-2}(a_2 + a_5) \\ 5 & (a_o + a_3 W^{-3}) + W^{-5}(a_1 + a_4 W^{-3}) + W^{-4}(a_2 + a_5 W^{-3}) \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Nhận xét rằng trong (2.22) biểu thức trong ngoặc của các dòng 0-2-4 giống nhau, các dòng 1-3-5 giống nhau. Do đó sô lượng tính toán sẽ được giảm đi đáng kể.

### 2.4.2. Dạng nhân tử FFT tổng quát

**Định lý 2.4.1.** *Nếu $N = RC$, thì DFT $\mathbf{W_N f}$ của bất kỳ vector $\mathbf{f} \in L(\mathbf{Z_N})$ có thể được tính toán với $N(R + C) = RC(R + C)$ phép nhân.*

*Chứng minh.* Ta có

$$F_N[f](M) = \sum_{K=0}^{N-1} f(K) W^{-KM}, \quad M = 0, 1, 2..., N-1; W = W_N = e^{2\pi i/N}. \tag{2.23}$$

Chia $K$ cho $C$ và chia $M$ cho $R$ ta có

$$K = Ck + k_o; k = 0, 1, ...R - 1; k_o = 0, 1, ..., C - 1,$$
$$M = Rn + n_o; n = 0, 1, ..., C - 1; n_o = 0, 1, ..., R - 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} W^{-KM} &= W^{-(Ck+k_o)(Rn+n_o)} \\ &= W^{-Nkn} W^{-Ckn_o} W^{-k_o Rn} W^{-k_o n_o}. \end{aligned}$$

Vì $W^{-Nkn} = 1$ với mọi $k$ và $n$, nên thay $W^{-KM}$ vào (2.23) ta được

$$F_N[f](M) = \sum_{k_o=0}^{C-1} \Big[ \sum_{k=o}^{R-1} f(kC + k_o) W^{-Ckn_o} \Big] W^{-k_o(n_o+nR)}. \tag{2.24}$$

Với

$$W_R = e^{2\pi i/R}, \quad W_C = e^{2\pi i/C}$$

ta có

$$W_{RC}^{-n_oCk} = W_R^{-n_ok}, \quad W_{RC}^{-k_onR} = W_C^{-k_on}.$$

Đặt

$$f(kC + k_o) = g_{k_o}(k), \quad k = 0, 1, ..., R-1.$$

Ta tính DFT của $g_{k_o}(k)$ :

$$h_{k_o}(n_o) = F_R[g_{k_o}(k)](n_o) = \sum_{k=o}^{R-1} g_{k_o}(k) W_R^{-n_ok}, \quad n_o = 0, 1, ..., R-1. \tag{2.25}$$

Ta thay biểu thức trong ngoặc trong (2.24) bởi $h_{k_o}(n_o)$ :

$$F_N[f](M) = \sum_{k_o=0}^{C-1} h_{k_o}(n_o) W^{-k_on_o} W^{-k_onR} = \sum_{k_o=0}^{C-1} h_{k_o}(n_o) W^{-k_on_o} W_C^{-k_on}. \tag{2.26}$$

Trong (2.25) với mỗi $n_o$ ta cần $R$ phép nhân. Vì $n_o$ thay đổi từ 1 đến $R-1$, nên với $k_o$, để biết được toàn bộ $h_{k_o}(n_o)$ ta cần $R^2$ phép nhân. Vì có $C$ giá trị của $k_o$, nên để biết được tất cả các giá trị của $h_{k_o}(n_o)$ cần $CR^2$ phép nhân.

Bây giờ xét phương trình (2.26). Mỗi giá trị $F_N[f](M)$ có thể tính toán bằng cách thêm C giá trị của $h_{k_o}(n_o)W^{-k_on_o}W^{-k_onR}$. Vì có $N = RC$ hàng, nên tất cả có $C.N = C.RC = RC^2$ phép nhân bổ sung. Như vậy để tính $h_{k_o}(n_o)$ ta cần $RC^2$ phép nhân, còn để tính $F_N[f](M)$ ta cần $RC^2$ phép toán nhân nữa. Vậy có

$$CR^2 + RC^2 = RC(C + R) = N(C + R).$$

**Nhận xét 2.2.** *Giả $N = k^2$ và đủ lớn. Khi đó số phép nhân theo thuật toán trình bày ở trên sẽ ít hơn rất nhiều so với tính trực tiếp. Thật vậy, ta có*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(R+C)}{N^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2(k+k)}{k^4} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0.$$

**Ví dụ 2.4.1.** Giả sử $N = 900$. Nếu tính trực tiếp DFT thì có $900^2 = 810000$ phép nhân. Vì 900 có phân tích nhân tử là 30.30 nên với phương pháp đã trình bày ở trên chỉ cần 900(30+30)=54 000 phép nhân. Ta có

$$\frac{N(R+C)}{N^2} = \frac{R+C}{N} = \frac{60}{900} = \frac{1}{15}.$$

# Chương 3
# Một số ứng dụng

Trong chương này, trình bày một số ứng dụng của biến đổi Fourier rời rạc tìm nghiệm gần đúng tuần hoàn của phương trình vi phân thường, bài toán biên Dirichlet của phương trình Poisson trong hình chữ nhật, một số vấn đề xử lý tín hiệu tiếng hót trong Rada. Ngoài ra, còn trình bày một số hệ thống tuyến tính của lý thuyết tín hiệu số, đó là vấn đề tìm hàm hệ và tín hiệu ra khi biết tín hiệu vào. Nội dung chủ yếu của chương này được hình thành từ các tài liệu [2], [4], [9] và [10].

## 3.1. Giải phương trình vi phân thường

Xét phương trình vi phân

$$u'' + au' + bu = f(t), \tag{3.1}$$

trong đó $f$ là hàm liên tục, $2\pi$ - tuần hoàn theo t, $a, b$ là các hằng số. Đối với phương trình (3.1) đã có các phương pháp giải tích tìm nghiệm tuần hoàn duy nhất, nếu hàm $f$ được biết với mọi $t$. Tuy nhiên, nếu chỉ biết giá trị của $f$ tại các điểm $t_j = jh$, trong đó $h = 2\pi/N$ với $N > 1$ thì phương pháp trên đây không thể vận dụng được. Trong phần này chúng tôi trình bày cách vận dụng biến đổi Fourier rời rạc để tìm nghiệm gần đúng của phương trình (3.1).

Chúng ta rời rạc hóa phương trình (3.1) bằng cách thay các đạo hàm bởi các sai phân sau đây

$$u'(t) \to \frac{u(t) - u(t-h)}{h}, \tag{3.2}$$

$$u''(t) \to \frac{u(t+h) + u(t-h) - 2u(t)}{h^2}. \tag{3.3}$$

Sử dụng các phương trình (3.2) và (3.3), ta thay phương trình (3.1) bởi phương trình

$$\frac{u(t+h) + u(t-h) - 2u(t)}{h^2} + a.\frac{u(t) - u(t-h)}{h} + bu(t) = f(t).$$

Phương trình trên đây được viết lại như sau

$$u(t+h) + (bh^2 + ah - 2)u(t) + (1 - ah)u(t-h) = h^2 f(t). \tag{3.4}$$

Trong (3.4) cho $t = t_j = 2\pi j/N$ và đặt

$$u_k = u(2\pi k/N), f_k = f(2\pi k/N), \alpha = bh^2 - ah - 2, \beta = 1 - ah$$

ta được phương trình sai phân cấp hai sau đây

$$u_{k+1} + \alpha u_k + \beta u_{k-1} = h^2 f_k. \tag{3.5}$$

Chúng ta sẽ giả thiết rằng

$$W_N^n + \alpha + \beta W_N^{-n} \neq 0, \quad \forall n. \tag{3.6}$$

Từ giả thiết $f(t)$ và $u(t)$ là những hàm tuần hoàn chu kỳ $2\pi$ suy ra các hàm rời rạc $u_k, f_k$ là những hàm tuần hoàn chu kỳ $N$. Tác động biến đổi Fourier rời rạc $F_N$ vào hai vế của phương trình (3.5), sử dụng công thức dịch chuyển

$$F_N[u_{k+1}](n) = W_N^n U_n,$$
$$F_N[u_{k-1}](n) = W_N^{-n} U_n,$$

ta có

$$(W_N^n + \alpha + \beta W_N^{-n})U_n = h^2 F_n. \tag{3.7}$$

Với giả thiết (3.6) từ (3.7) ta tìm được

$$U_n = \frac{h^2 F_n}{W_N^n + \alpha + \beta W_N^{-n}}. \tag{3.8}$$

Công thức (3.8) cho ta biến đổi Fourier rời rạc của ẩn hàm $u_k$. Lấy biến đổi Fourier rời rạc ngược của (3.8) ta có

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \frac{h^2 F_n}{W_N^n + \alpha + \beta W_N^{-n}} W_N^{kn}. \tag{3.9}$$

## 3.2. Bài toán biên Dirichlet cho phương trình Helmholz

### 3.2.1. Đặt bài toán

Xét bài toán Dirichlet cho phương trình

$$-\Delta u + \mu u = f \quad \text{trong } D, \tag{3.10}$$

$$u = 0 \text{ trên } \partial D, \tag{3.11}$$

trong đó $\mu > 0$ là hằng số cho trước, $f$ là hàm đã cho trong miền $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ có độ trơn cần thiết. Ta biết rằng với mọi $f \in L^2(D)$ bài toán (3.10) - (3.11) có nghiệm duy nhất trong không gian Sobolev $H_o^1(D)$. Trong mục này sẽ trình bày cách tìm nghiệm gần đúng của bài toán (3.10) - (3.11) bằng phương pháp sai phân và giải các phương trình sai phân bằng phương pháp biến đổi Fourier nhanh [ 10, tr. 226].

### 3.2.2. Rời rạc hóa bài toán

Bài toán (3.10)-(3.11) có dạng sai phân tương ứng

$$\frac{4u_{k,l} - u_{k-1,l} - u_{k+1,l} - u_{k,l-1} - u_{k,l+1}}{h^2} + \mu u_{k,l} = f_{k,l} \quad \text{trong} D_h, \tag{3.12}$$

$$u_{k,l} = 0 \quad \text{trên } \partial D_h, \tag{3.13}$$

$$0 \leqslant k \leqslant \frac{1}{h} = N, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{h} = N. \tag{3.14}$$

Ký hiệu

$$\mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} u_{1,l} \\ \dots \\ u_{N-1,l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} f_{1,l} \\ \dots \\ f_{N-1,l} \end{bmatrix}; \quad l = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0... & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0... & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0... & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}$ là ma trận vuông có cấp bằng $N-1$. Ký hiệu $\mathbf{E}$ là ma trận đơn vị cùng cấp. Bài toán (3.12)-(3.13) được viết lại ở dạng

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = h^2\mathbf{f}_1, \tag{3.15}$$

$$-\mathbf{u}_{l-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{l+1} = h^2\mathbf{f}_l, \quad l = 2, 3, ..., N-2, \tag{3.16}$$

$$-\mathbf{u}_{N-2} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{N-1} = h^2\mathbf{f}_{N-1}, \tag{3.17}$$

trong đó

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + (2 + \mu h^2)\mathbf{E}.$$

### 3.2.3. Fourier rời rạc cà Fourier nhanh

Các ma trận $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ có chung cơ sở của các vector riêng và các trị riêng tương ứng

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(m)} = \lambda_m \mathbf{v}^{(m)}, \quad m = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\lambda_m = 2(1 - \cos\frac{m\pi}{N}), \quad v_k^{(m)} = \sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{m\pi k}{N}$$

$$k = 1, 2, ..., N-1, m = 1, 2, ..., N-1$$

trong đó $v_k^{(m)}$ là phần tử thứ $k$ của vector riêng $\mathbf{v}^{(m)}$. Ta có

$$||\mathbf{v}^{(m)}||^2 = \sum_{k=1}^{N-1}(v_k^{(m)})^2 = 1.$$

Vì các vector $\mathbf{v}^{(m)}$ tạo thành cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclide $\mathbb{R}^{N-1}$ nên các vector $\mathbf{u}_l, \mathbf{f}_l (l = 1, 2, ..., N-1)$ có thể biểu diễn ở dạng

$$\mathbf{u}_l = \sum_{m=1}^{N-1} U_{m,l}\mathbf{v}^{(m)}, \quad \mathbf{f}_l = \sum_{m=1}^{N-1} F_{m,l}\mathbf{v}^{(m)}. \tag{3.18}$$

Đặt các biểu thức này vào (3.15) - (3.17), sử dụng tính trực giao của hệ $\{\mathbf{v}^{(m)}\}$ ta có hệ các phương trình đại số sau đây

$$\lambda_m U_{m,1} - U_{m,2} = h^2 F_{m,1}, \tag{3.19}$$

$$-U_{m,l-1} + \lambda_m U_{m,l} - U_{m,l+1} = h^2 F_{m,l}, l = 2, ..., N-2, \tag{3.20}$$

$$-U_{m,N-2} + \lambda_m U_{m,N-1} = h^2 F_{m,N-1}. \tag{3.21}$$

Như vậy, để giải hệ (3.15) - (3.17) chỉ cần tính $N-1$ lần các hệ số Fourier của các véctor $\mathbf{f}_l$, giải $N-1$ hệ với các ma trận dạng ba đường chéo (3.19) - (3.21) để xác định các hệ số Fourier của các vector $\mathbf{u}_l$ $(l = 1, 2, ..., N-1)$, và tính $\mathbf{u}_l$ theo công thức (3.18).

Sự khai triển vào chuỗi Fourier (3.18) có thể được thực hiện bằng cách sử dụng biến đổi Fourier nhanh. Ta có

$$F_{m.l} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^{N-1} f_{n,l} \sin \frac{\pi mn}{N} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^{2N-1} f_{n,l} \sin \frac{2\pi mn}{2N}, \qquad (3.22)$$

trong đó $f_{N,l} = ... = f_{2N-1,l} = 0$. Việc tính toán các vector $\mathbf{u}_l$ cũng được thực hiện bằng cách tương tự.

## 3.3. Tín hiệu tiếng hót

### 3.3.1. Định nghĩa

Các tín hiệu dạng $a_n W^{-n^2/2}$ thường được gặp trong các hệ thống Rada và được gọi là tín hiệu tiếng hót. Vì thế biến đổi Fourier rời rạc của các tín hiệu tiếng hót được gọi là biến đổi Fourier rời rạc tiếng hót (DCFT). Trong mục này sẽ giới thiệu một số tính chất của biến đổi Fourier rời rạc tiếng hót [9].

**Định nghĩa 3.3.1.** Giả sử $x(n), 0 \leqslant n \leqslant N-1$ là tín hiệu chiều dài $N$. Biến đổi Fourier rời rạc tiếng hót của tín hiệu $x(n)$ được xác định bởi công thức

$$X_c(k,l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{ln^2+kn}, \qquad 0 \leqslant k, l \leqslant N-1, \qquad (3.23)$$

trong đó $W_N = exp(-2\pi i/N)$.

Nhận xét rằng biến đổi Fourier rời rạc tín hiệu tiếng hót theo công thức (3.23) tương tự công thức (1.22).

Từ công thức (3.23) ta thấy rằng, với mỗi $l$ cố định, thì $X_c(k,l)$ là biến đổi Fourier rời rạc của $x(n)W^{ln^2}$. Khi $l = 0$, thì DCFT trùng với

*DFT*. Do đó, biến đổi Fourier rời rạc tiếng hót ngược được xác định theo công thức

$$x(n) = W^{-ln^2}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} X_c(k,l)W_N^{-kn}, 0 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{3.24}$$

### 3.3.2. Các tính chất cơ bản

**Bổ đề 3.3.1.** *Khi $N$ là số nguyên tố, với $0 \leqslant k, l \leqslant N-1$, có đẳng thức sau đây*

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{ln^2+kn}\Big| = \begin{cases} N, & k = l = 0, \\ \sqrt{N}, & l \neq 0, \\ 0, & l = 0, k \neq 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

*Chứng minh.* Ký hiệu

$$P(k,l) := \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{ln^2+kn}. \tag{3.26}$$

Khi đó, với $0 < l \leqslant N-1$ ta có

$$\begin{aligned} |P(k,l)|^2 &= \Big(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{ln^2+kn}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-lm^2-km}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{(n-m)[l(n+m)+k]} := \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} W_N^{r[l(2n-r)+k]} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{2rln}\Big)W_N^{-r^2l+rk} \quad (r = n-m). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Khi N là số nguyên tố ,$2rl$ là bội của N khi và chỉ khi $r$ là bội của N, khi đó $r$ phải bằng không hay

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{2rln} = 0 \quad \text{với} \quad 0 \prec r, l \leq N-1.$$

Khi đó nếu $l = 0$ và $k = 0$ thì

$$|P(k,l)|^2 = \sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} 1\Big)1 = N^2.$$

Suy ra

$$|P(k,l)| = N.$$

Khi $l \neq 0$ ta có

$$|P(k,l)|^2 = \sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{2rln}\Big)W_N^{-r^2l+rk} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Nên ta sẽ có

$$|P(k,l)| = \sqrt{N}.$$

Khi $l = 0$ và $k \neq 0$ ta có

$$|P(k,l)|^2 = \sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{2rln}\Big)W_N^{-r^2l+rk} = N\sum_{r=0}^{N-1} W_N^{rk} = 0.$$

Khi đó ta phải có

$$|P(k,l)| = 0.$$

Vậy bổ đề đã được chứng minh

**Định lý 3.3.1.** *Giả sử $x(n)$ là tín hiệu tiếng hót đơn độc*

$$x(n) = W^{-(l_o n^2 + k_o n)} \tag{3.28}$$

*đối với các số nguyên $k_o, l_o : 0 \leqslant k_o, l_o, \leqslant N-1$. Nếu chiều dài $N$ là số nguyên tố thì DCFT của nó có cường độ*

$$|X_c(k,l)| = \begin{cases} \sqrt{N}, & khi\ l = l_o, k = k_o, \\ 1, & khi\ l \neq l_o, \\ 0, & khi\ l = l_o, k \neq k_o. \end{cases} \tag{3.29}$$

*Chứng minh.* Ta có

$$|X_c(k,l)| = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{ln^2+kn} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(l-l_o)n^2+(k-k_o)n}.$$

*Áp dụng bổ đề* (3.3.1) *ta có điều phải chứng minh.*

**Định lý 3.3.2.** *Giả sử $x(n)$ như trong Định lý 3.3.1, nghĩa là có dạng (3.28). Nếu chiều dài $N$ không phải là số nguyên tố thì biến đổi Fourier rời rạc tiếng hót của nó thoả mãn bất đẳng thức*

$$\max_{(k,l)\neq(k_o,l_o)} |X_c(k,l)| \geq \sqrt{2}. \tag{3.30}$$

*Chứng minh.* Để chứng minh (3.30) ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\max_{(k,l)\neq(0.0)} |P(k,l)|^2 \geq 2N. \tag{3.31}$$

Trong đó $P(k,l)$ được xác định bởi (3.26). Vì $N$ không phải số nguyên tố nên ta đặt $N = N_1N_2$ với $N_1 \geq 2$,$N_2 \geq 2$.
Trường hợp 1:
$N_1$ và $N_2$ đều lẻ. Trong trường hợp này ta giả sử $l = N_1$ và $k = 0$. Khi đó theo (3.27) ta có

$$\begin{aligned}
|P(k,l)|^2 &= \sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} W_{N_2}^{2rn}\Big)W_{N_2}^{-r^2} \\
&= \sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{2rn} + \sum_{n=N_2}^{2N_2-1} W_{N_2}^{2rn} + \ldots + \sum_{n=(N_1-1)N_2}^{N_1N_2-1} W_{N_2}^{2rn}\Big)W_{N_2}^{-r^2} \\
&= N_1\sum_{r=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{2rn}\Big)W_{N_2}^{-r^2}.
\end{aligned}$$

Hơn thế nữa nếu ta đặt $r = r_1N_2$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
|P(k,l)|^2 &= N_1\sum_{r_1=0}^{N_1-1}\Big(\sum_{n=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{2r_1N_2n}\Big)W_{N_2}^{-r_1^2N_2^2} \\
&= N_1\sum_{r_1=0}^{N_1-1}\sum_{n=0}^{N_2-1} N_2 = N_1^2N_2 \geq 2N.
\end{aligned}$$

Trường hợp ii) :
Một trong $N_1$ và $N_2$ là chẵn, chúng ta giả sử $N_2 = 2$ , $k = l = N_1$ .
Trong trường hợp này $W_N^{2rln} = 1$.

Từ (3.27), ta có

$$|P(k,l)|^2 = N\sum_{r=0}^{N-1} W_2^{-r(r-1)}.$$

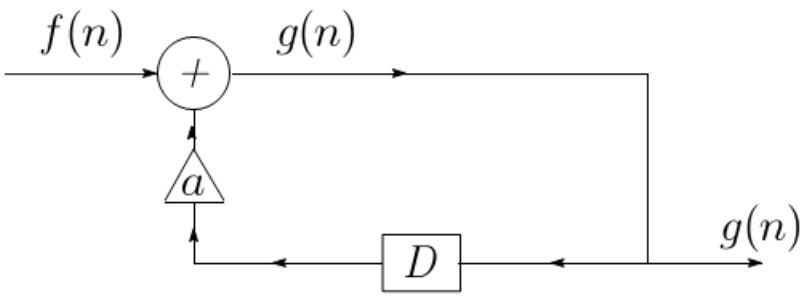
Vì $r(r-1)$ là số chẵn nên $W_2^{-r(r-1)} = 1$.
Từ đó ta sẽ có

$$|P(k,l)|^2 = N^2 \geq 2N.$$

Từ i) và ii) suy ra định lí được chứng minh.

## 3.4. Một số hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số

▷ **3.1.** Tìm tín hiệu ra và hàm hệ của hệ thống sau




*Lời giải.* Từ hệ thống trên ta có phương trình

$$f(n) + ag(n-1) = g(n),$$

$$g(n) - ag(n-1) = f(n). \tag{3.32}$$

Tác động biến đổi Fourier rời rạc vào hai vế của phương trình trên, ở thời điểm m, ta có

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)W_N^{-mn} - a\sum_{n=0}^{N-1} g(n-1)W_N^{-mn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-mn}.$$

Khi đó vận dụng công thức dịch chuyển thời gian (1.33) và đưa phương trình trên về dạng

$$G(m) - aW_N^{-m}G(m) = F(m).$$

Với $a \neq 1$ khi đó sẽ có

$$G(m) = \frac{1}{1 - aW_N^{-m}} F(m). \tag{3.33}$$

Đặt

$$H(m) = \frac{1}{1 - aW_N^{-m}}. \tag{3.34}$$

Khi đó phương trình (3.33) được viết lại là

$$G(m) = H(m)F(m). \tag{3.35}$$

Hàm $H(m)$ được gọi là hàm hệ của hệ thống trên.

Để tìm được tín hiệu ra $g(n)$, ta sử dụng biến đổi Fourier rời rạc ngược hai vế của phương trình trên và áp dụng mệnh đề ( 1.5.2 ) ta thu được

$$g(n) = h(n) * f(n), \tag{3.36}$$

trong đó

$$h(n) = F^{-1}[H(m)](n). \tag{3.37}$$

Áp dụng biến đổi Fourier rời rạc ngược ta có

$$\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{W_N^{mn}}{1 - aW_N^{-m}} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\cos\frac{2\pi mn}{N} + ia\sin\frac{2\pi mn}{N}}{\left(1 - a\cos\frac{2\pi m}{N}\right) + ia\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\left(\cos\frac{2\pi mn}{N} + i\sin\frac{2\pi mn}{N}\right)\left((1 - a\cos\frac{2\pi m}{N}) - ia\sin\frac{2\pi m}{N}\right)}{\left(1 - a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)^2 - \left(ia\sin\frac{2\pi m}{N}\right)^2} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\cos\frac{2\pi mn}{N}\left(1 - a\cos\frac{2\pi m}{N}\right) + a\sin\frac{2\pi mn}{N}\sin(\frac{2\pi m}{N})}{1 - 2a\cos\frac{2\pi m}{N} + a^2} \\
&+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin\frac{2\pi mn}{N}\left(1 - a\cos\frac{2\pi m}{N}\right) - a\sin\frac{2\pi m}{N}\cos(\frac{2\pi mn}{N})}{1 - 2a\cos\frac{2\pi m}{N} + a^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\cos\dfrac{2\pi mn}{N} - a\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N}\cos\dfrac{2\pi mn}{N} - \sin\dfrac{2\pi mn}{N}\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)}{1 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + a^2}$$

$$+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin\dfrac{2\pi mn}{N} - a\Big(\sin\dfrac{2\pi mn}{N}\cos\dfrac{2\pi m}{N} + \cos\dfrac{2\pi mn}{N}\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)}{1 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + a^2}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\cos\dfrac{2\pi mn}{N} - a\cos\dfrac{2m\pi(n+1)}{N}}{1 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + a^2}$$

$$+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin\dfrac{2\pi mn}{N} - a\sin\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}}{1 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + a^2}.$$

Ta xét trường hợp $N = 2$, khi đó

$$h(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1} \frac{\cos(mn\pi) - a\cos[m(n+1)\pi)}{1 - 2a\cos(\pi m) + a^2}$$

$$+ i\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1} \frac{\sin(mn\pi) - a\sin(m(n+1)\pi)}{1 - 2a\cos(m\pi) + a^2}$$

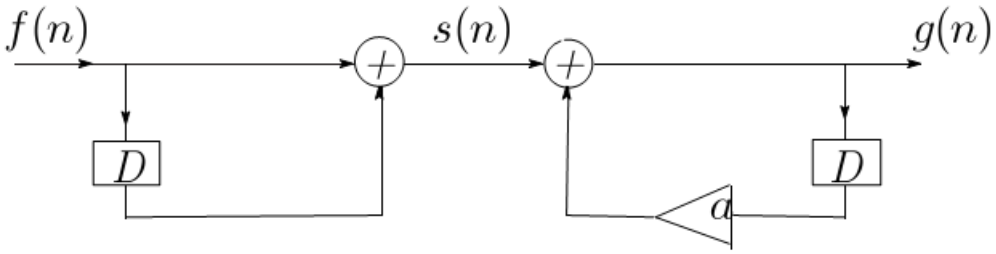
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1-a}{(1-a)^2} + \frac{\cos(n\pi) - \cos(\pi(n+1))}{(1+a)^2}\Big) + i\frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(n\pi) - a\sin((n+1)\pi)}{(1+a)^2}\Big).$$

Với $a = 2$, thì

$$h(0) = -0,3888888888 + 0,0000000000.i$$
$$h(1) = -0,6111111111 + 0,0000000000.i.$$

Với $a = 3$, thì

$$h(0) = -0,1388888888 + 0,0000000000.i$$
$$h(1) = -0,3611111111 + 0,0000000000.i.$$




▷ **3.2.** Tìm tín hiệu ra và hàm hệ của hệ thống sau

*Lời giải.* Từ hệ thống trên, ta có hệ

$$\begin{cases} f(n) + f(n-1) = s(n) \\ s(n) + ag(n-1) = g(n). \end{cases} \tag{3.38}$$

Trong hệ phương trình (3.38), thay $s(n)$ từ phương trình trên xuống phương trình dưới và chuyển vế ta thu được

$$g(n) - ag(n-1) = f(n) + f(n-1).$$

Tác động biến đổi Fourier rời rạc vào hai vế của phương trình trên, ở thời điểm m, ta có

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n)W_N^{-mn} - a\sum_{n=0}^{N-1} g(n-1)W_N^{-mn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-mn} + \sum_{n=0}^{N-1} f(n-1)W_N^{-mn}.$$

Khi đó vận dụng công thức dịch chuyển thời gian (1.33) và đưa phương trình trên về dạng

$$G(m) - aW_N^{-m}G(m) = F(m) + F(m)W_N^{-m}.$$

Với $a \neq 1$ khi đó sẽ có

$$G(m) = \frac{1 + W_N^{-m}}{1 - aW_N^{-m}}F(m). \tag{3.39}$$

Đặt

$$H(m) = \frac{1 + W_N^{-m}}{1 - aW_N^{-m}}. \tag{3.40}$$

Phương trình (3.39) được viết lại là

$$G(m) = H(m)F(m). \tag{3.41}$$

Hàm $H(m)$ được gọi là hàm hệ của hệ thông trên.

Tìm tín hiệu ra $g(n)$ của hệ thống, tác dụng biến đổi Fourier rời rạc ngược vào hai vế của phương trình trên và vận dụng mệnh đề ( 1.5.2 ) ta thu được

$$g(n) = h(n) * f(n), \tag{3.42}$$

trong đó

$$h(n) = F^{-1}[H(m)](n). \tag{3.43}$$

Áp dụng biến đổi Fourier rời rạc ngược ta có

$$\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(1+W_N^{-m})W_N^{mn}}{1-aW_N^{-m}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\left(1+\cos\frac{2\pi m}{N}-i\sin\frac{2\pi m}{N}\right)\left(\cos\frac{2\pi mn}{N}+i\sin\frac{2\pi mn}{N}\right)}{\left(1-a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)+ia\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\left(1+\cos\frac{2\pi m}{N}\right)\cos\frac{2\pi mn}{N}+\sin(\frac{2\pi m}{N})\sin\frac{2\pi mn}{N}}{\left(1-a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)+ia\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\left(1+\cos\frac{2\pi m}{N}\right)\sin\frac{2\pi mn}{N}-\sin\frac{2\pi m}{N}\cos\frac{2\pi mn}{N}}{\left(1-a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)+ia\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\cos\frac{2\pi mn}{N}+\left(\cos\frac{2\pi m}{N}\cos\frac{2\pi mn}{N}+\sin\frac{2\pi mn}{N}\sin\frac{2\pi m}{N}\right)}{\left(1-a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)+ia\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\sin\frac{2\pi mn}{N}+\left(\cos\frac{2\pi m}{N}\sin\frac{2\pi mn}{N}-\sin\frac{2\pi m}{N}\cos\frac{2\pi mn}{N}\right)}{\left(1-a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)+ia\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\cos\frac{2\pi mn}{N}+\cos\left(\frac{2\pi m(n-1)}{N}\right)}{\left(1-a\cos\frac{2\pi m}{N}\right)+ia\sin\frac{2\pi m}{N}}
\end{aligned}$$

$$+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\sin\dfrac{2\pi mn}{N}+\sin\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)}{\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)+ia\sin\dfrac{2\pi m}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\Big[\cos\dfrac{2\pi mn}{N}+\cos\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)\Big]\Big[\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)-ia\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big]}{\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)^2-\Big(ia\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)^2}$$

$$+i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\Big[\sin\dfrac{2\pi mn}{N}+\sin\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)\Big]\Big[\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)-ia\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big]}{\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)^2-\Big(ia\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)^2}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\Big[\cos\dfrac{2\pi mn}{N}+\cos\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)\Big]\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)}{1-2a\cos\dfrac{2\pi m}{N}+a^2}$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{a\Big[\sin\dfrac{2\pi mn}{N}+\sin\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)\Big]\sin\dfrac{2\pi m}{N}}{1-2a\cos\dfrac{2\pi m}{N}+a^2}$$

$$-i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{a\Big[\cos\dfrac{2\pi mn}{N}+\cos\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)\Big]\sin\dfrac{2\pi m}{N}}{1-2a\cos\dfrac{2\pi m}{N}+a^2}$$

$$+i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{a\Big[\sin\dfrac{2\pi mn}{N}+\sin\Big(\dfrac{2\pi m(n-1)}{N}\Big)\Big]\Big(1-a\cos\dfrac{2\pi m}{N}\Big)}{1-2a\cos\dfrac{2\pi m}{N}+a^2}.$$

Xét trường hợp $N=2$, ta thu được

$$h(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{\Big[\cos(mn\pi)+\cos\Big(m(n-1)\pi\Big)\Big]\Big(1-a\cos(m\pi)\Big)}{1-2a\cos(m\pi)+a^2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{a\Big[\sin(mn\pi)+\sin\Big(m(n-1)\pi\Big)\Big]\sin(m\pi)\Big)}{1-2a\cos(m\pi)+a^2}$$

$$
\begin{aligned}
&- i\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{a\Big[\cos(mn\pi)+\cos\Big(m(n-1)\pi\Big)\Big]\sin(m\pi)}{1-2a\cos(m\pi)+a^2}\\
&+ i\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{a\Big[\sin(mn\pi)+\sin\Big(m(n-1)\pi\Big)\Big]\Big(1-a\cos(m\pi)\Big)}{1-2a\cos(m\pi)+a^2}\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{2(1-a)}{(1-a)^2}+\frac{\Big(\cos(n\pi)+\cos(n-1)\pi\Big)(1+a)\Big]}{(1+a)^2}\\
&\qquad + i\frac{a}{2}\Big[\frac{\Big(\sin(n\pi)+\sin(n-1)\pi\Big)(1+a)}{(1+a)^2}\Big]
\end{aligned}
$$

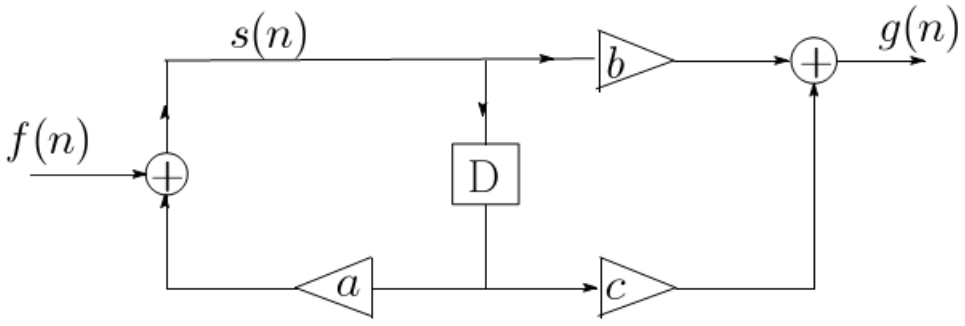
Với $a=2$, thì

$$
\begin{aligned}
h(0) &= -1,0000000000+0,0000000000.i\\
h(1) &= -1,0000000000+0,0000000000.i.
\end{aligned}
$$

Với $a=3$, thì

$$
\begin{aligned}
h(0) &= -0,5000000000+0,0000000000.i,\\
h(1) &= -0,5000000000+0,0000000000.i.
\end{aligned}
$$

▷ **3.3.** Tìm tín hiệu ra và hàm hệ của hệ thống sau




*Lời giải.* Từ hệ thông trên, ta có hệ

$$
\begin{cases}
f(n)+as(n-1)=s(n)\\
bs(n)+cs(n-1)=g(n),
\end{cases}
\tag{3.44}
$$

$$\begin{cases} s(n) - as(n-1) = f(n) \\ bs(n) + cs(n-1) = g(n). \end{cases}$$

Giả sử $c + ab \neq 0$. Khi đó sử dụng phương pháp giải hệ phương trình bằng định thức, ta thu được

$$\begin{cases} s(n) = \dfrac{cf(n) + ag(n)}{c + ab} \\ s(n-1) = \dfrac{g(n) - bf(n)}{c + ab}. \end{cases} \tag{3.45}$$

Trong hệ (3.45), phương trình dưới thay $n$ bởi $n + 1$, hệ trên được viết lại

$$\begin{cases} s(n) = \dfrac{cf(n) + ag(n)}{c + ab} \\ s(n) = \dfrac{g(n+1) - bf(n+1)}{c + ab}. \end{cases}$$

Suy ra

$$g(n+1) - ag(n) = bf(n+1) + cf(n).$$

Tác động biến đổi Fourier rời rạc vào hai vế của phương trình trên, ở thời điểm m, ta có

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(n+1)W_N^{-mn} - a\sum_{n=0}^{N-1} g(n)W_N^{-mn} = b\sum_{n=0}^{N-1} f(n+1)W_N^{-mn} + c\sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{-mn}.$$

Khi đó vận dụng công thức dịch chuyển thời gian (1.33) và đưa phương trình trên về dạng

$$W_N^m G(m) - aG(m) = bW_N^m F(m) + cF(m).$$

Với $a \neq 1$ khi đó sẽ có

$$G(m) = \frac{bW_N^m + c}{W_N^m - a} F(m). \tag{3.46}$$

Đặt

$$H(m) = \frac{bW_N^m + c}{W_N^m - a}. \tag{3.47}$$

Phương trình (3.46) được viết lại là

$$G(m) = H(m)F(m). \tag{3.48}$$

Hàm $H(m)$ được gọi là hàm hệ của hệ thống trên.
Để tìm tín hiệu ra $g(n)$ của hệ thống, ta tác dụng biến đổi Fourier vào hai vế của phương trình trên và áp dụng mệnh đề (1.5.2 ) ta có

$$g(n) = h(n) * f(n), \tag{3.49}$$

trong đó

$$h(n) = F^{-1}(H(m)). \tag{3.50}$$

Áp dụng biến đổi Fourier rời rạc ngược

$$\begin{aligned}
h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(bW_N^m + c)W_N^{mn}}{W_N^m - a} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(c + b\cos\frac{2\pi m}{N} + ib\sin\frac{2\pi m}{N})(\cos\frac{2\pi mn}{N} + i\sin\frac{2\pi mn}{N})}{(\cos\frac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(c + b\cos\frac{2\pi m}{N})\cos\frac{2\pi mn}{N} - b\sin\frac{2\pi m}{N}\sin\frac{2\pi mn}{N}}{(\cos\frac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(c + b\cos\frac{2\pi m}{N})\sin\frac{2\pi mn}{N} + b\sin\frac{2\pi m}{N}\cos\frac{2\pi mn}{N}}{(\cos\frac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{c\cos\frac{2\pi mn}{N} + (b\cos\frac{2\pi m}{N}\cos\frac{2\pi mn}{N} - b\sin\frac{2\pi m}{N}\sin\frac{2\pi mn}{N})}{(\cos\frac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\frac{2\pi m}{N}} \\
&+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{c\sin\frac{2\pi mn}{N} + (b\cos\frac{2\pi m}{N}\sin\frac{2\pi mn}{N} + b\sin\frac{2\pi m}{N}\cos\frac{2\pi mn}{N})}{(\cos\frac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\frac{2\pi m}{N}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{c\cos\dfrac{2\pi mn}{N} + b\cos\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}}{(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\dfrac{2\pi m}{N}}$$

$$+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{c\sin\dfrac{2\pi mn}{N} + b\sin\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}}{(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a) + i\sin\dfrac{2\pi m}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Big(c\cos\dfrac{2\pi mn}{N} + b\cos\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}\Big)\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a - i\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)}{\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a\Big)^2 - \Big(i\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)^2}$$

$$+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Big(c\sin\dfrac{2\pi mn}{N} + b\sin\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}\Big)\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a - i\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)}{\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a\Big)^2 - \Big(i\sin\dfrac{2\pi m}{N}\Big)^2}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Big(c\cos\dfrac{2\pi mn}{N} + b\cos\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}\Big)\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a\Big)}{a^2 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + 1}$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Big(c\sin\dfrac{2\pi mn}{N} + b\sin\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}\Big)\sin\dfrac{2\pi m}{N}}{a^2 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + 1}$$

$$- i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Big(c\cos\dfrac{2\pi mn}{N} + b\cos\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}\Big)\sin\dfrac{2\pi m}{N}}{a^2 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + 1}$$

$$+ i\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{\Big(c\sin\dfrac{2\pi mn}{N} + b\sin\dfrac{2\pi m(n+1)}{N}\Big)\Big(\cos\dfrac{2\pi m}{N} - a\Big)}{a^2 - 2a\cos\dfrac{2\pi m}{N} + 1}.$$

Xét trường hợp $N = 2$, ta có

$$h(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1} \frac{\Big(\cos(mn\pi) + b\cos[m(n+1)\pi]\Big)\Big(\cos(m\pi) - a\Big)}{a^2 - 2a\cos(m\pi) + 1}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{\Big(\sin(mn\pi)+b\sin[m(n+1)\pi]\Big)\sin(m\pi)}{a^2-2a\cos(m\pi)+1}$$

$$-i\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{\Big(\cos(mn\pi)+b\cos[m(n+1)\pi]\Big)\sin(m\pi)}{a^2-2a\cos(m\pi)+1}$$

$$+i\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1}\frac{\Big(\sin(mn\pi)+b\sin[m(n+1)\pi]\Big)\Big(\cos(m\pi)-a\Big)}{a^2-2a\cos(m\pi)+1}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{(c+b)(1-a)}{(1-a)^2}-\frac{\Big(c\cos n\pi+b\cos(n+1)\pi\Big)(1+a)}{(1+a)^2}\Big]$$

$$-\frac{i}{2}\Big[\frac{\Big(c\sin n\pi+b\sin(n+1)\pi\Big)(1+a)}{(1+a)^2}\Big].$$

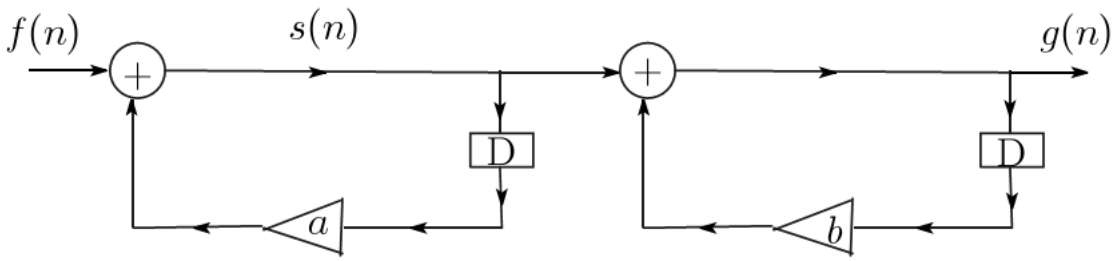
Với $a=2,\ b=3,\ c=4,$ thì

$$h(0)=-7,3333333333+0,0000000000.i$$
$$h(1)=-7,6666666666+0,0000000000.i.$$

Với $a=6,\ b=8,\ c=10,$ thì

$$h(0)=-1,942857143+0,0000000000.i$$
$$h(1)=-1,657142857+0,0000000000.i.$$

▷ **3.4.** Tìm tín hiệu ra và hàm hệ của hệ thống sau



*Lời giải.* Từ hệ thống ta có hệ

$$\begin{cases} f(n) + as(n-1) = s(n) \\ s(n) + bg(n-1) = g(n). \end{cases} \tag{3.51}$$

Trong hệ trên, phương trình dưới thay $n$ bởi $n-1$, ta được hệ mới

$$\begin{cases} f(n) + as(n-1) = s(n) \\ g(n) - bg(n-1) = s(n) \\ g(n-1) - bg(n-2) = s(n-1). \end{cases}$$

Suy ra

$$f(n) + a[g(n-1) - bg(n-2)] = g(n) - bg(n-1).$$

Viết lại phương trình trên

$$g(n) - (a+b)g(n-1) + abg(n-2) = f(n).$$

Tác động biến đổi Fourier rời rạc vào vế của phương trình trên, ở thời điểm m, ta có

$$G(m) - (a+b)W_N^{-m}G(m) + abW_N^{-2m}G(m) = F(m).$$

Với $\Big(ab - (a+b) + 1\Big) \neq 0$ khi đó sẽ có

$$G(m) = \frac{1}{1 - (a+b)W_N^{-m} + abW_N^{-2m}}F(m). \tag{3.52}$$

Đặt

$$H(m) = \frac{1}{1 - (a+b)W_N^{-m} + abW_N^{-2m}}. \tag{3.53}$$

Phương trình (3.52) được viết lại là

$$G(m) = H(m)F(m). \tag{3.54}$$

Hàm $H(m)$ được gọi là hàm hệ của hệ thống trên.

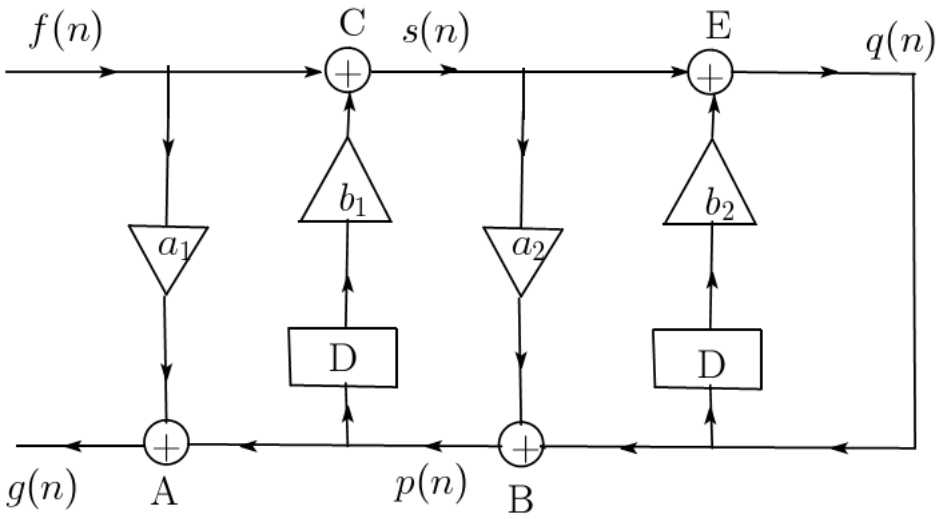
Để tìm tín hiệu ra $g(n)$, ta biến đổi Fourier rời rạc ngược vào hai vế của phương trình trên và áp dụng mệnh đề ( 1.5.2 ) ta có

$$g(n) = h(n) * f(n), \tag{3.55}$$

trong đó

$$h(n) = F^{-1}[H(m)](n). \tag{3.56}$$

▷ **3.5.** Tìm tín hiệu ra và hàm hệ của hệ thống sau




*Lời giải.* Từ hệ thống trên, ta có hệ sau

$$\begin{cases} a_1 f(n) + p(n) = g(n) \\ a_2 s(n) + q(n) = p(n) \\ b_1 p(n-1) + f(n) = s(n) \\ s(n) + b_2 q(n-1) = q(n). \end{cases} \tag{3.57}$$

Tác động biến đổi Fourier rời rạc hai vế của từng phương trình của hệ trên, ở thời điểm m, và vận dụng công thức dịch chuyển thời gian (1.33) và đưa hệ trên phương trình trên về dạng

$$\begin{cases} a_1 F(m) + P(m) = G(m) & (1) \\ a_2 S(m) + Q(m) = P(m) & (2) \\ F(m) + b_1 W_N^{-m} P(m) = S(m) & (3) \\ S(m) + b_2 W_N^{-m} Q(m) = Q(m) & (4). \end{cases}$$

Từ (3),(4) và $b_2 \neq 1$, ta có

$$Q(m) = \frac{S(m)}{1 - b_2 W_N^{-m}} = \frac{F(m) + b_1 W_N^{-m} P(m)}{1 - b_2 W_N^{-m}}. \tag{5}$$

Thay (5) và (3) vào (2) ta thu được

$$P(m) = \frac{F(m) + b_1 W_N^{-m} P(m)}{1 - b_2 W_N^{-m}} + a_2\Big(F(m) + b_1 W_N^{-m} P(m)\Big).$$

Quy đồng và bỏ mẫu ta thu được

$$\Big((1-b_2W_N^{-m})(1-a_2b_1W_N^{-m})-b_1W_N^{-m}\Big)P(m) = \Big(1+a_2(1-b_2W_N^{-m})\Big)F(m).$$

Với $(1 - b_2)(1 - a_2b_1) - b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ khi đó sẽ có

$$P(m) = \frac{1 + a_2(1 - b_2W_N^{-m})}{(1 - b_2W_N^{-m})(1 - a_2b_1W_N^{-m}) - b_1W_N^{-m}} F(m).$$

Thay $P(m)$ vào phương trình (1) ta có

$$a_1F(m) + \frac{1 + a_2(1 - b_2W_N^{-m})}{(1 - b_2W_N^{-m})(1 - a_2b_1W_N^{-m}) - b_1W_N^{-m}} F(m) = G(m)$$

$$G(m) = \frac{(1 - b_2W_N^{-m})\Big[a_1(1 - a_2b_1W_N^{-m}) + a_2\Big] - a_1b_1W_N^{-m} + 1}{(1 - b_2W_N^{-m})(1 - a_2b_1W_N^{-m}) - b_1W_N^{-m}} F(m). \tag{3.58}$$

Đặt

$$H(m) = \frac{(1 - b_2W_N^{-m})\Big[a_1(1 - a_2b_1W_N^{-m}) + a_2\Big] - a_1b_1W_N^{-m} + 1}{(1 - b_2W_N^{-m})(1 - a_2b_1W_N^{-m}) - b_1W_N^{-m}} \tag{3.59}$$

Khi đó phương trình (3.58) được viết lại là

$$G(m) = H(m)F(m). \tag{3.60}$$

Hàm $H(m)$ được gọi là hàm hệ của hệ thông trên.

Để tìm tín hiệu ra $g(n)$ của hệ thống ta sử dụng biến đổi Fourier rời rạc ngược và áp dụng mệnh đề ( 1.5.2) ta được kết quả sau

$$g(n) = h(n) * f(n), \tag{3.61}$$

trong đó

$$h(n) = F^{-1}(H(m)). \tag{3.62}$$

# Kết luận

Luận văn đã trình bày và đạt được một số kết quả sau

1. Trình bày lý thuyết biến đổi Fourier rời rạc cho các dãy số, đặc biệt là dãy số tuần hoàn.
2. Giới thiệu hai thuật toán biến đổi Fourier nhanh, đó là thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian và thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo tần số. Hai thuật toán trên được minh họa bằng sơ đồ thuật toán với độ dài lấy mẫu là $N = 2^3$. Ngoài ra, trình bày thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp $N = RC$, trong đó R hoặc C không phải là lũy thừa của 2.
3. Trình bày các ứng dụng của biến đổi Fourier rời rạc vào bài toán phương trình vi phân thường, bài toán biên Dirichlet của phương trình Poisson trong hình chữ nhật.
4. Ngoài ra, luận văn còn giới thiệu xử lý tín hiệu số tiếng hót trong Rada và một số hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

# Tài liệu tham khảo


[1] Đặng Đình Ánh, Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân và Nguyễn Văn Nhân (2001), *Biến đổi tích phân*, NXB Giáo Dục TP. Hồ Chí Minh.

[2] Hồ Văn Sung (2005), *Xử lý số tín hiệu*, Tập hai, NXB Giáo Dục Hà Nội.

[3] Nguyễn Quốc Trung (2006), *Xử lý tín hiệu và lọc số*, NXB Khoa học và Kỹ thuật Hà Nội.

[4] Athanasios Papoulis (1977), *Signal Analysis*, MCGRAW-HiLL, INC, New York.

[5] Batenkov D. (2005), *Fast Fourier Transform*, Key Paper in Computer Science Seminar.

[6] Blahut R.E. (1984), *The Fast Fourier Transform for Digital Signal Processing*, New York, Addison-Wesley.

[7] Brigham E.O. (1988), *The Fast Fourier Transform and Applications*, Englewood Cliffs, N.J, Prentice-Hall.

[8] George Bachman, Lowrence Narici and Edward Bechenstain (2000), *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.

[9] Giang-Gen Xia (2000), *Discrete Chirp-Fourier Transform and Its Applications to Chirp Rate Estimation*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.48, pp. 3122-3133.

[10] Marchuk G.I. (1997), *Methods of Comtational Mathematics*, Nauka, Moscow ( in Russian ).

[11] Walker J.S. (1966), *Fast Fourier Transform*, 2nd ed, Boca Raton, FL, CRC Press.